بنية الأعداد ونظرية الأعداد

الطبعة الأولى

١٤٠٣هـ ـ ١٩٨٣م

دار الفرقان





للنشر والتوزيع

عمان / الأردن / جبل الحسين شارع خالد بن الوليد

ص. ب ٩٢١٥٢٦ ـ ت: ٦٦٠٩٣٧

الطابعون

جمعية عمال المطابع التعاونية

هاتف ٣-٦٣٧٧٧١ ـ ص. ب ٨٥٧ ـ عمان ـ الأردن

بنية الأعداد ونظرية الأعداد

تأليف

د. عدنان محمد عوض
جامعة اليرموك
الاردن

بسام يوسف عودة
كلية تدريب عمان
الاردن

دار الفرقان

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على محمد رسول الله وعلى آله وصحبه ومن تبعه إلى يوم الدين وبعد:

فهذا الكتاب في نظرية الأعداد نقدمه إلى ابنائنا الكرام الناطقين بلغة الضاد آملين ان نوفق في عرض هذه المادة العلمية باسلوب سهل ووضوح تام.

لقد عالجنا في الفصل الأول بنية أنظمة الأعداد بانواعها: الاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة والاعداد النسبية والاعداد الحقيقية والاعداد المركبة والاعداد المعيارية وتعرضنا لخواص العمليات عليها. وتعرضنا في الفصل الثاني لقابلية القسمة والقاسم المشترك الاعظم والمضاعف المشترك الأصغر والاعداد الأولية والنظرية الاساسية في الحساب والمعادلات الديوفانتينيه. أما الفصل الثالث فيعطي تمهيداً للتطابق والتطابق الخطي. كما تعرضنا في الفصل الرابع لنظرية فيرما ونظرية ويلسون ومثلثات فيثاغورس.

أما مادة الكتاب فهي شاملة بحيث تغطي مساق نظرية الأعداد أو بنية الأعداد لمدة فصل دراسي واحد في كليات المجتمع، وقد تكون مادة الكتاب مساعده لطلبة الجامعات. اننا نرحب بكل نقد بناء من طلبتنا وزملائنا ونقدم شكرنا لكل من يرشدنا الى موضع النقص أو الخطأ في محاولتنا المتواضعة هذه..

والله من وراء القصد

المؤلفـــان

التاريخ: ١٩٨٣/٣/١

المحتويـــــات

الفصل الأول
بنية انظمة الأعداد

سنعالج في هذا الفصل مجموعات الاعداد المختلفة من اعداد طبيعية واعداد صحيحة واعداد نسبية واعداد مركبة واعداد معيارية. هذا بالاضافة إلى خواص العمليات الحسابية على عناصر هذه المجموعات. كما اننا سنتعرض إلى نظم الترقيم والعمليات الأربع عليها.

[١ - ١] مجموعة الأعداد الطبيعية

عرف الانسان مجموعة الاعداد الطبيعية منذ أمد بعيد . كما أنه تعرف على بعض خواصها والى بعض العمليات عليها ، ولكنه كان يخلط بين الخواص التي يسلم بصحتها لوضوحها ولا يستطيع برهنتها ، وبين الخواص التي يمكن برهنتها . ومن المعروف ان البناء الرياضي يقوم على مفردات غير معرفة وعلى مفردات معرفة وبديهيات (مسلمات) توضح دون برهان ثم هناك النظريات التي يمكن برهنتها . والمرحلة الأخيرة في البناء الرياضي هي مرحلة التطبيقات . وإذا ما أردنا دراسة مجموعة الأعداد الطبيعية وبعض العمليات الهامة التي تعرف عليها فإننا نواجه عدة اساليب مختلفة لتقديم هذه المجموعة ، وسنحاول في هذا الفصل الأخذ باكثر من وجهة نظر واحدة.

ولكننا سنحاول أن يبقى اسلوبنا مبسطاً دون الخوض في التعقيدات الرياضية التي قد تنشأ عن تبني اسلوب دون آخر.

لهذا سنبدأ بعرض « **مسلمات بيانو** » عن الأعداد الطبيعية . وتنص هذه المسلمات على أن مجموعة الأعداد الطبيعية **ط*** تحقق الخواص التالية :

١) المسلمة الأولى : يوجد عدد طبيعي وهو العدد الذي نرمز له بالرمز ١ .

٢) المسلمة الثانية : لكل عدد طبيعي م يوجد عدد طبيعي يليه نرمز له بالرمز م*

حيث م* = م + ١ ويسمى م المقدم ويسمى م* تالي م .

٣) المسلمة الثالثة : ليس للعدد ١ مقدم ، وهو العدد الوحيد الذي ليس له مقدم .

٤) المسلمة الرابعة : اذا كان تالي عددين متساويين فان مقدميهما متساويان اي اذا كان م* = ب* فان م = ب

٥) المسلمة الخامسة : اذا كانت م ⊂ ط* وكان ١ ∈ م ، وكذلك اذا كان م* ∈ م لكل م ∈ ط* فان م = ط*

من الواضح ان المسلمة الثانية تفترض وجود عملية جمع (+) على ط*، ولما كان ١ ∈ ط* حسب المسلمة الأولى فان تالي العدد ١ هو ١ + ١ والذي نرمز له عادة بالرمز ٢ .

ولما كان ٢ ∈ ط* حسب هذه النتيجة فان تاليه وهو العدد ٢ + ١ عدد طبيعي ونرمز له عادة بالرمز ٣ .

وبالاستمرار بهذا الاسلوب نستنتج أن:

ط* = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... }

وواضح من المسلمة الثانية أن ط* مجموعة غير منتهية وانها غير محدودة من أعلى .

علاقة المساواة على الأعداد الطبيعية:

اذا كان ا ، ب ∈ ط* فاننا نكتب ا = ب للدلالة على أن ا ، ب رمزين لنفس العدد الطبيعي بينما ا ≠ ب تكتب للدلالة على أن ا ، ب رمزين يمثلان عددين مختلفين .

ان علاقة المساواة على ط* **علاقة تكافؤ أي أنها تحقق الخواص التالية:**

١) علاقة انعكاسية حيث ا = ا **لكل** ا ∈ ط*

٢) علاقة تماثل حيث ا = ب **تتضمن** ب = ا

٣) علاقة تعدي لأنه اذا كانت ا = ب ، ب = جـ **فان** ا = جـ **حيث** ا ، ب ، جـ ∈ ط*

نعلم أن ١ + ١ = ٢ وكذلك ١ + ٢ = ٣ وبالتالي فإن:

١ + (١ + ١) = ٣ . أي ان العدد ٣ هو مجموع العدد ١ ثلاث مرات وباتباع نفس الاسلوب نلاحظ أن ١ + ١ + ١ + ١ = ٤ .

واضح ان عملية الجمع الواردة في المسلمة الثانية تقتصر على جمع العدد ١ الى العدد ا وباستخدام المنطق الوارد أعلاه نستطيع أن نوسع تعريف عملية

الجمع الواردة في المسلمة الثانية لتشمل اعداد طبيعية مثل ا ، ب حيث أحدهما لا يساوي الواحد .

فمثلاً ٣ + ٥ = (١ + ١ + ١) + (١ + ١ + ١ + ١ + ١)

٣ مرات   ٥ مرات

= (١ + ١ + ١ + ... + ١)   ٨ مرات

= ٨ .

وواضح أنه إذا كانت ﻫ ، ﺑ ، ﺟ ∈ ط* وكان ﻫ = ﺑ فإن:

ﻫ + ﺟ = ﺑ + ﺟ وذلك لأنه

ﻫ + ﺟ = ﻫ + ﺟ لأن المساواة علاقة انعكاسية .

ومنها ﻫ + ﺟ = ﺑ + ﺟ مبدأ التعويض

وهو المطلوب .

وكذلك اذا كان ﻫ = ﺑ ، ﺟ = ء فان:

ﻫ + ﺟ = ﺑ + ء وذلك لأن:

ﻫ + ﺟ = ﻫ + ﺟ (لان = علاقة انعكاسية)

= ﺑ + ء مبدأ التعويض

وهو المطلوب .

تعريف عملية الضرب (×) على ط*

اذا كان ﻫ ، ﺑ ∈ ط* فإن حاصل ﻫ في ﺑ والذي يكتب رمزاً

ﻫ × ﺑ يعرّف على النحو التالي:

ﻫ × ﺑ = ﻫ + ﻫ + ... + ﻫ (ﺑ من المرات)

فمثلا ١ × ٢ = ١ + ١ مرتين

= ٢

وكذلك ٣ × ٤ = ٣ + ٣ + ٣ + ٣

= (١ + ١ + ١) + (١ + ١ + ١) + (١ + ١ + ١) +

(١ + ١ + ١) ١٢ مرة

= ١٢

واضح أنه اذا كانت أ ، ب ، جـ ∈ ط* وكان أ = ب فانه

أ × جـ = ب × جـ وذلك لأن

أ × جـ = أ × جـ (لانه = علاقة انعكاسية)

= ب × جـ مبدأ التعويض

وهو المطلوب

وكذلك اذا كان أ = ب ، جـ = د. فان:

أ × جـ = ب × د وذلك لأنه:

أ × جـ = أ × جـ (لان = علاقة انعكاسية)

= ب × د مبدأ التعويض

وهو المطلوب

والسؤال الذي ينشأ الآن هو: ما هي خواص عمليتا الجمع والضرب على مجموعة الاعداد الطبيعية ط*؟

من الواضح من خلال الملاحظات السابقة أنه بالامكان ان نقول ان العمليتين + ، × تحققان الخواص التالية:

١) كل من + ، × عملية مغلقة على ط* بمعنى انه اذا كان أ ، ب ∈ ط* فان أ + ب ∈ ط* وكذلك أ × ب ∈ ط*.

٢) كل من + ، × عملية تبديلية على ط* بمعنى انه لكل أ ، ب ∈ ط* يكون

أ + ب = ب + أ ، أ × ب = ب × أ

٣) كل من + ، × عملية تجميعية على ط* بمعنى انه لكل أ ، ب ، جـ ∈ ط* يكون (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)،

(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

٤) تتوزع العملية × على العملية + ولا تتوزع + على × اي انه لكل أ ، ب ، جـ ∈ ط*

يكون $أ \times (ب + جـ) = (أ \times ب) + (أ \times جـ)$،

$(ب + جـ) \times أ = (ب \times أ) + (جـ \times أ)$،

ولكن $أ + (ب \times جـ) \neq (أ + ب) \times (أ + جـ)$،

$(ب \times جـ) + أ \neq (ب + أ) \times (جـ + أ)$

٥) العدد ١ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب على ط*. أي أنه لكل

$أ \in$ ط* يكون $١ \times أ = أ \times ١ = أ$

لاحظ ان $أ + أ = أ (١ + ١)$ حسب قانون التوزيع

$= أ \times ٢ = ٢ \times أ$ حسب خاصية التبديل

« قبل ان نذكر الخواص المتبقية لعمليتي الجمع والضرب لا بد من التعرف على العدد صفر والذي يرمز له بالرمز (٠) وعلى علاقة اصغر من والذي يرمز لها بالرمز (<) وذلك لعلاقة كل منهما بخواص عمليتي الجمع والضرب » .

العدد صفر: لنفرض وجود عدد نرمز له على النحو (٠) ويقرأ صفراً ولنعرف المجموعة **ط** = ط* $\cup$ {٠} ولنفرض ان العدد صفر يحقق الخاصية التالية:

$أ + ٠ = ٠ + أ = أ$ لكل $أ \in$ ط

يسمى العدد صفر عنصراً محايداً بالنسبة لعملية الجمع على ط . ومن الجدير بالذكر هنا ان العدد صفر هو العدد الوحيد الذي يحقق $أ + ٠ = ٠ + أ = أ$ وبالاستفادة من هذا العنصر نستطيع التعرف على المزيد من خواص الاعداد الطبيعية . ومنها:

علاقة اصغر من (<)

اذا كان أ . ب عددين **طبيعيين في ط* فإننا نقول أنه أ اصغر من** ب **وبالرموز** $أ < ب$ **اذا وفقط اذا وجد عدد جـ** $\in$ **ط* بحيث أنه:**

$أ + جـ = ب$

فمثلا ٣ < ٥ وذلك لوجود العدد ٢ ∈ ط* بحيث ٢ + ٣ = ٥

وبما ان ٤ + ٥ = ٩ فان ٤ < ٩ وكذلك ٥ < ٩ (لماذا؟)

ومن خواص الاعداد الطبيعية هي الخاصية المسماه **خاصية احد ثلاثه** والتي تنص على أنه اذا كان أ ، ب ∈ ط* فان واحدة فقط من العبارات التالية صحيحة

أ < ب أو أ = ب أو ب < أ

والآن دعنا نذكر بقية خواص عمليتي الجمع والضرب.

٦) اذا كان أ + ب = أ + ج فان ب = ج حيث أ ، ب ، ج ∈ ط **يسمى هذا قانون الحذف (الاختزال) من اليمين لعملية الجمع.**

البرهان:

افرض ان ب ≠ ج اذن ب < ج أو ج < ب لتكن ب < ج (**ونترك الحالة** ج < ب لانها تماثل هذه الحاله)

اذن توجد د ∈ ط* حيث ان ب + د = ج

ومنها (أ + ب) + د = أ + (ب + د) خاصة التجميع

= أ + ج

ولكن أ + ب = أ + ج

اذن (أ + ب) + د = أ + ب (لأنه = علاقة تعدي)

ومنها د = صفر لان الصفر هو العنصر الوحيد الذي يحقق الخاصية السابقة

وهذا تناقض لان ٠ ∉ ط* اذن ب ≮ ح

وبالمثل يمكن اثبات ان ح ≮ ب فحسب خاصية احد ثلاثة يكون ب = ح وهو المطلوب.

٧) اذا كان أب = أح وكان أ ∈ ط*، ب ، ح ∈ ط فان ب = ح قانون الحذف (الاختزال) لعملية الضرب من اليمين.

البرهان:

افرض ان $ب \neq ح$ اذن $ب < ح$ أو $ح < ب$ لنأخذ الحالة $ب < ح$ إذن يوجد $ى \in ط^*$ بحيث أن $ب + ى = ح$ إذن $م(ب + ى) = م ح$

اي $م ب + م ى = م ح$ ولكن $م ب = م ح$ إذن

$م ب + م ى = م ب$ ومنها $م ى =$ صفر

ولكن $م$ ، $ى \in ط^*$ إذن $م ى =$ صفر $\in ط^*$ وهذا تناقض

اذن $ب \not< ح$ وبالمثل يمكن اثبات ان $ح \not< ب$.

اذن حسب خاصية احد ثلاثة يكون $ب = ح$ وهو المطلوب.

٨) اذا كان $م \in ط$ فان $م \times ٠ = ٠ \times م = ٠$

البرهان

لاحظ أن:

$م \times ٠ = م (٠ + ٠)$

$= م \times ٠ + م \times ٠$

$= ٠ + ٠$

$= ٠$

وبالمثل يمكن اثبات ان $٠ \times م = ٠$

٩) اذا كان $م \times ب = ٠$ وكان $م \in ط$ ، $ب \in ط^*$ فان $م = ٠$

البرهان

$م \times ب = ٠$

$= ٠ \times ب$

اذن $م = ٠$ حسب قانون الاختزال وهو المطلوب.

السؤال الذي ينشأ الآن هو ما خواص علاقة أقل من ($<$)؟. وللإجابة عن هذا السؤال نلاحظ ان:

١) علاقة اقل من < ليست انعكاسية وذلك لأنه ليس صحيحاً ان:
أ < أ لكل أ ∈ ط*. ولاثبات ذلك افرض ان أ < أ اذن يوجد حـ
∈ط* حيث ان
أ + حـ = أ
ولكن أ + ٠ = أ
اذن أ + حـ = أ + ٠
وباستخدام خاصية الاختزال نستنتج ان حـ = ٠ وهذا تناقض لأن
حـ ∈ط*.
اذن < ليست انعكاسية.

٢) علاقة أقل من < ليست متماثلة. ولاثبات ذلك افرض انها متماثلة.
اي أ < ب ⇒ ب < أ.
والآن:
أ < ب تعني وجود حـ ∈ ط* بحيث ان أ + حـ = ب.
ولكن ب < أ اذن أ + حـ < أ
ومنها توجد ى ∈ ط* بحيث ان
(أ + حـ) + ى = أ
اي أ + (حـ + ى) = أ حسب خاصية التجميع.
ومنها أ + (حـ + ى) = أ + ٠
وباستعمال خاصية الاختزال نستنتج ان
حـ + ى = صفر
ولكن حـ + ى ∈ ط* حسب خاصية الانغلاق
اذن ٠ ∈ ط* وهذا تناقض
اذن < ليست متماثلة.

٣) علاقة اقل من < علاقة متعدية ولاثبات ذلك نفرض ان أ < ب،
ب < حـ والمطلوب اثبات ان أ < حـ.

البرهان: أ < ب تعني وجود د ∈ ط* بحيث أ + د = ب ، ولكن
ب < حـ

اذن أ + د < حـ

لهذا يوجد هـ ∈ ط* بحيث ان

(أ + د) + هـ = حـ

ومنها أ + (د + هـ) = حـ

ولما كانت د + هـ ∈ ط* حسب خاصية الانغلاق

اذن أ < حـ وهو المطلوب.

٤) اذا كانت أ ، ب ، حـ ∈ ط* وكان أ < ب فإن
أ + حـ < ب + حـ وكذلك أحـ < ب حـ.

البرهان: أ < ب ⇐ يوجد د ∈ ط* بحيث

أ + د = ب

أولاً: اذن (أ + د) + حـ = ب + حـ

ومنها

أ + (د + حـ) = ب + حـ

اي أ + (حـ + د) = ب + حـ

(أ + حـ) + د = ب + حـ

اذن أ + حـ < ب + حـ لان د ∈ ط*.

ثانياً: بما ان أ + د = ب فإن

حـ (أ + د) = حـ ب

اي حـ أ + حـ د = حـ ب

اذن حـ أ < حـ ب لان حـ د ∈ ط* (لماذا؟).

وهو المطلوب

نلاحظ من الفقرات السابقة ان النظام الرياضي ذو العملية (ط ، +) شبه زمره (نصف زمره) اي ان عملية الجمع على ط مغلقة وتجميعية ولكن هذا

النظام ليس زمره بسبب عدم وجود نظائر جمعية. وكذلك النظام (ط ، $\times$) نصف زمره.

الأسس

سنستعمل في الفقرات اللاحقة مفهوم الأسس لهذا نقدم مفهوم الأسس فيما يلي:

اذا كان م ، ن $\in$ ط* وعرفنا $م^{١} = م$

$$م^{ن+١} = م^{ن} \times م$$

يسمى $م^{ن}$ القوة النونية للعدد م ويسمى م الأساس، ن الأس.

فمثلاً $م^{٢} = م \times م$ ،

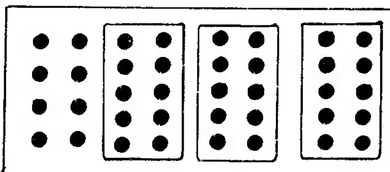
$$م^{٣} = م^{٢} \times م = (م \times م) \times م$$

أنظمة الترقيم:

بدأ الرياضيون استخدامهم الرموز للتعبير عن الاعداد منذ القدم. وقد وجدوا انهم بحاجة الى عدد لا نهائي من هذه الرموز لكتابة الأعداد، إلا أن اكتشاف القيمة المنزلية جعل التعبير عن اي عدد برموز محدوده وسيله سهلة التعبير عن الأعداد. ومثل ذلك نظامنا العددي العشري الذي يستخدم عشرة أرقام هي ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ، ٩ للتعبير عن الاعداد. وسوف ندرس في هذا البند كيف كتابة الأعداد باساسات (بأنظمة) غير عشرية.

الترقيم العشري (كتابة الأعداد باساس عشري)

عندما نتكلم عن الاعداد المكتوبة للأساس عشرة فاننا نعني ان عملية تجميع هذه الاعداد تكون بالعشرات، ففي الشكل التالي تتكون مجموعة النقط في الشكل (المستطيل) من ثلاث عشرات وثمانية:

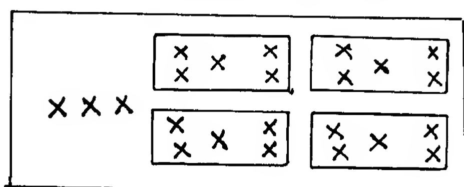


وبدلاً من كتابة ثلاث عشرات وثمانية فإننا نكتب ذلك على النحو $(٣٨)_{١٠}$.

بعد ان نتفق على ان الرقم في المنزلة الثانية على اليسار يدل على عدد العشرات. وتسمى ١٠ الدليل اي ان $(٣٨)_{١٠} = ٨ + ٣ \times ١٠$

وبالمثل يكون العدد $(٣٤٢٥)_{١٠} = ٥ + ٢\times١٠ + ٤\times١٠^{٢} + ٣\times١٠^{٣}$.

كتابة الأعداد بأساس غير عشري:



إذا نظرنا الى الشكل أعلاه نجد ان مجموعة هذه النقط تتكون من أربع خمسات وثلاثة. وسوف نرمز لها على النحو $(٤٣)_{٥}$ وتسمى ٥ الدليل.

اي ان $(٤٣)_{٥} = ٣ + ٤ \times ٥$

وبالمثل يكون $(٢٤٣)_{٥} = ٣ + ٤\times٥ + ٢\times٥^{٢}$.

ملاحظات:

١) سوف نصطلح على عدم كتابة الدليل اذا كان النظام المتبع في كتابة الاعداد هو النظام العشري. ونكتفي مثلاً بكتابة (٦٥) بدلا من $(٦٥)_{١٠}$.

٢) استخدمنا في الترقيم العشري عشرة أرقام هي ٠، ١، ٢، ....، ٩ وفي النظام الخماسي خمسة أرقام هي ٠، ١، ٢، ٣، ٤.

سؤال: ما هي الأرقام التي يمكن استخدامها في الترقيم الثنائي والسباعي؟

التحويل من النظام العشري إلى أي نظام آخر وبالعكس:

سنوضح فيما يلي كيفية تحويل أي عدد من النظام العشري إلى أي نظام

آخر وبالعكس. والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال ١

حول العدد العشري ١١٨ إلى النظام السباعي.

الحل: ستكون صورة العدد الجديد مماثلة للصورة

أ ب جـ = أ + ب × $٧^{١}$ + جـ × $٧^{٢}$

وعليه فانه يتحتم علينا ان نعيد التجميع في هذا العدد للأساس ٧. ولهذا نبدأ بقسمة العدد ١١٨ على ٧ كما يلي:

الباقي	المقسوم	القاسم
	١١٨	٧
٦	١٦	

باقي القسمة ونوعه: واحدات خارج القسمة ونوعه: سبعات

وعليه فإن منزلة الأحاد سيكون فيها ٦.

والآن نعيد تجميع أل ١٦ سبعة إلى سبع سبعات وذلك بقسمة ١٦ على سبعة

الباقي	المقسوم	القاسم
	١٦	٧
٢	٢	

باقي القسمة ونوعه: سبعات خارج القسمة ونوعه: سبع سبعات

مما تقدم نرى أن العدد ١١٨ يحتوي على ٦ واحدات، ٢ من السبعات، ٢ من السبع سبعات. اذن فهو يكتب في النظام السباعي على الشكل $(٢٢٦)_{٧}$.

ويمكن أن نجمع الخطوتين السابقتين كما يلي:

الباقي	المقسوم	القاسم
	١١٨	٧
٦	١٦	٧
٢	٢	

وتلاحظ في العملية الأخيرة أن ما يأتي تحت كلمة الباقي هو الواحدات ثم السبعات وهكذا لو إستمرت عملية القسمة. كما أن آخر عدد من أسفل يأتي تحت كلمة المقسوم يعين آخر منزلة من العدد المطلوب. ويدل السهم في الشكل على ارقام العدد بالترتيب ابتداء من منزله الأحاد وحتى المنزلة الأخيرة. أي أن العدد هو $(٢٢٦)_{٧}$

مثال ٢

حول العدد $(١٠١١)_{٢}$ الى النظام العشري.

الحل: $(١٠١١)_{٢} = ١ + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٣} = ١١$

العمليات في الأنظمة غير العشرية

ان اجراء العمليات الأساسية على الأنظمة غير العشرية يتيح لنا الفرصة لفهم أكثر وأعمق للقيم المنزلية، ولقواعد التجميع والحمل واعادة التجميع. **وسوف نعرض فيما يلي بعض الأمثلة على عمليتي الجمع والضرب في أنظمة غير عشرية.**

مثال ٣ :

اجمع $(٢٣١)_{٤}$ ، $(٢٢)_{٤}$

الحل :

$$\begin{array}{r} (٢٣١)_{٤} \\ +\ (٢٢)_{٤} \\ \hline (٣١٣)_{٤} \end{array}$$

١ + ٢ = ٣ وتكتب في خانة الأحاد لأنها أقل من أربعة .

٣ + ٢ وتساوي خمس اربعات . اي انها تساوي حزمة اربعات + حزمة من نوع أربع أربعات .

لهذا نضع الأولى في منزلة الأربعات ونحمل الثانية إلى منزلة الأربع أربعات .

وأخيراً ١ + ٢ = ٣ من نوع $٤^{٢}$

لهذا فإن $(٢٣١)_{٤} + (٢٢)_{٤} = (٣١٣)_{٤}$

مثال ٤

اجر عملية الضرب التالية $(٣٥)_{٨} \times (٤٣)_{٨}$

الحل :

$$\begin{array}{r} (٣٥)_{٨} \\ \times\ (٤٣)_{٨} \\ \hline (١٢٧)_{٨} \\ (١٦٤)_{٨} \\ \hline (١٧٦٧)_{٨} \end{array}$$

٣ خمسات = $(١٧)_{٨}$ نضع ٧ ونحمل ١ ثمانية

٣ في ٣ ثمانيات تساوي ١١ ثمانية ثم نضيف الثمانية المحمولة فتصبح ١٢ ثمانية .

٤ ثمانيات مكرره ٥ مرات = ٢٤ من الثمانيات. نكتب ٤ في منزلة الثمانيات (اي المنزلة الثانية) ونحمل ٢ من الثماني ثمانيات الى المنزلة التالية.

٤ ثمانيات مكررة ٣ ثمانيات = ١٤ من الثماني ثمانيات يضاف إليها ٢ المحمولة فتصبح $(١٦)_٨$ فنكتبها ثم نجمع مع ملاحظة ان الأساس ثمانية.

ان القيام بعملية الضرب هذه طويلة ولذلك اذا عملنا كلا من جدولي الجمع والضرب فان ذلك يساعدنا في القيام بهذه العملية بيسر وسهولة.

مثال ٥ :

أجر عملية الطرح $((٤٣)_٥ - (٢٤)_٥$

الحل:

$$
\begin{array}{r}
(\overset{٣}{\not{٤}}\ \ \overset{١}{٣})_٥ \\
-(٢\ \ ٤) \\
\hline
(١\ \ ٤)_٥
\end{array}
$$

حتى يمكننا اجراء عملية الطرح، والحصول على قيمة موجبه فإننا سنضطر لاعادة التجميع ونجري عليه عملية الاستلاف.

فنأخذ من أل ٤ خمسات خمسه واحدة ونضيفها إلى ٣ ثم نطرح منها ٤ كما يلي:

$(١٣)_٥ - (٤)_٥ = ٤$ واحدات

والخطوة التالية هي $(٣)_٥ - (٢)_٥ = ١$ خمسات

اي ان $(٤٣)_٥ - (٢٤)_٥ = (١٤)_٥$

النظام الثنائي:

تستخدم الالات الحاسبة الألكترونية النظام الثنائي في العمليات الحسابية لسهولة هذا النظام ولأننا نحتاج في هذا النظام إلى رمزين للترقيم هما ٠، ١ فالحاسب الألكتروني يعتمد في عمله على مرور التيار أو عدمه في

دوائره الكهربائية المتعددة، ويرمز لمرور التيار عادة بالرمز ١ ، كما يرمز لعدم مرور التيار بالرمز ٠

مثال ٦

اكتب جدولي الجمع والضرب في النظام الثنائي واستعملهما لايجاد (١٠١)$_{٢}$ + (١١١)$_{٢}$ ، (١٠١)$_{٢}$ × (١١١)$_{٢}$

الحل: من الواضح أن جدولي الجمع والضرب في النظام الثنائي هما كما يلي

+	٠	١
٠	٠	١
١	١	١٠

×	٠	١
٠	٠	٠
١	٠	١

لاحظ: ١ + ١ = (١٠)$_{٢}$ لماذا؟

وللتبسيط سوف لا نكتب الدليل اثناء اجراء العمليات التالية:

١٠١
\+ ١١١
―――――
١١٠٠

١ + ١ = ١٠ لهذا نضع ٠ ونحمل ١

٠ + ١ = ١ ثم ١ + ١ = ١٠ فنضع ٠ ونحمل ١

١ + ١ = ١٠ ثم ١٠ + ١ = ١١

وكذلك

١٠١
× ١١١
―――――
١٠١
١٠١
١٠١
―――――
١٠٠٠١١

أي أن (١٠١)$_{٢}$ × (١١١)$_{٢}$ = (١٠٠٠١١)$_{٢}$

مسلمة الأستقراء الرياضي:

إذا كان ن عدداً طبيعياً، وكانت ع(د) عبارة. فإن هذه العبارة تكون صحيحة لجميع قيم د إذا كانت:

١) ع (١) عبارة صحيحة.

٢) وكانت صحة العبارة ع(ك) لأي عدد طبيعي ك تتضمن صحة العبارة ع (ك*) حيث ك* = ك + ١ = تالي ك .

والأمثلة التالية توضح استعمالات هذه المسلمة التي بنيت على مسلمة بيانو الخامسة .

مثال ١

برهن على أن ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢د − ١) = $د^{٢}$ حيث ن عدد طبيعي .

البرهان:

١) اذا كانت د = ١ فإن الطرف الأيمن = ١ كذلك الطرف الأيسر = ١ إذن ع(١) صحيحة .

٢) لنفرض أن ع(ك) صحيحة وعلينا أن نبرهن على ان ع(ك + ١) صحيحة .

١ + ٣ + ٥ + ... + (٢د − ١) = $د^{٢}$ ......(١)

اذن ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ك − ١) = $ك^{٢}$ صحيحة فرضاً

الآن نريد أن نثبت أن ع (ك + ١) صحيحه .

بإضافة ٢ك + ١ لطرفي المعادلة (١) ينتج أن:

١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ك − ١) + (٢ك + ١) = $ك^{٢}$ + (٢ك + ١) = $(ك + ١)^{٢}$

لاحظ أن السبب في اضافة ٢ك + ١ للطرفين لان الحد الذي يلي العدد (٢ك − ١) هو العدد (ك + ١) .

مثال ٢:

اذا كان أ، ب، ن ثلاثة اعداد طبيعية فإن:

$$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن} .$$

البرهان:

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي.

١) اذا كانت ن = ١ فإن:

$$(أ \times ب)^{١} = أ^{١} \times ب^{١}$$

إذن ع (١) صحيحه اي أن العبارة صحيحة عندما ن = ١

٢) نفرض ان العبارة صحيحة عندما ن = ك . اي أنه نفرض أن: ع (ك) صحيحة.

اذن $(أ \times ب)^{ك} = أ^{ك} \times ب^{ك}$ وبضرب الطرفين في: $(أ \times ب)^{١}$ ينتج أنه:

$$(أ \times ب)^{ك} \times (أ \times ب)^{١} = (أ^{ك} \times ب^{ك}) \times (أ \times ب)^{١}$$

$$أ^{ك} [ب^{ك} \times (أ^{١} \times ب^{١})]$$ خاصية التجميع

$$= أ^{ك} [ب^{ك} + (ب^{١} \times أ^{١})]$$

$$= أ^{ك} (ب^{ك+١} \times أ^{١}) .$$

$$= (أ^{١} \times ب^{ك+١})$$ خاصية التبديل

$$= (أ^{ك} \times أ^{١}) ب^{ك+١}$$ خاصية التجميع

$$= أ^{ك+١} \times ب^{ك+١}$$

اذن $(أ \times ب)^{ك+١} = أ^{ك+١} \times ب^{ك+١}$

اي ان العبارة ع (ك + ١) صحيحه. بمعنى ان العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١

اي ان العبارة صحيحة لاي عدد مثل ن وهو المطلوب.

مثال ٣:

اذا كانت أ ، م، د ثلاثة اعداد طبيعية فان:

$$أ^{م} \times أ^{د} = أ^{م+د}$$

البرهان:

نستخدم اسلوب الاستقراء الرياضي.

١) لنفرض ان د = ١

اذن $أ^{م} \times أ^{١} = أ^{م+١}$ إذن ع(١) صحيحه

٢) لنفرض ان العبارة صحيحه عندما د = ك

اذن $أ^{م} \times أ^{ك} = أ^{م+ك}$ بضرب الطرفين في أ

$$أ^{م} \times أ^{ك} \times أ = أ^{م+ك} \times أ$$

$$أ^{م} \times أ^{ك+١} = أ^{م+ك+١} = أ^{م+(ك+١)}$$

اذن ع(ك+١) صحيحه ولذلك ع(د) صحيحه. بمعنى ان العبارة صحيحه لاية عدد د.

تعريف:

اذا كان أ عدداً طبيعياً فان $أ^{صفر} = ١$

عمليتا الطرح والقسمة على مجموعة الاعداد الطبيعية:

افرض أن أ ، ب ∈ ط فهل يوجد عدد طبيعي آخر مثل ح بحيث انه:

أ= ب + ح؟

بما ان أ ، ب ∈ ط فان أحد الاحتمالات الثلاثة التالية صحيحة:

١) أ = ب وعليه فان أ = ب + صفر ومنها ح = صفر.

٢) أ > ب وعليه فان أ = ب + ح حسب تعريف العلاقة > .

٣) أ < ب وعليه فان لا يمكن أن نجد عدد طبيعي مثل ح بحيث أن أ = ب + ح.

لذلك فانه يوجد عدد مثل حـ أو لا يوجد وهذا يعني وجود عدد طبيعي على الاكثر.

ومثال على ذلك:

لنأخذ العددين ٧ ، ٥ مثلا فانه يوجد عدد مثل حـ = ٢ بحيث ان ٧ = ٥+ ٧ بينما لا يمكن ايجاد عدد حـ ∋ ط بحيث أن ٥ = ٧ + حـ .

تعريف:

اذا كان ٲ ، ب عددان طبيعيان ووجد عدد طبيعي آخر مثل حـ بحيث ٲ = ب + حـ فاننا نكتب.

حـ = ٲ − ب وتقرأ ٲ طرح ب أو ٲ ناقص ب .

هذا ومن الممكن أن يكون ناتج طرح عددين طبيعين عدداً طبيعيا مثل ٧—٥ ويمكن ان لا يكون مثل ٥—٧ .

لهذا هناك حاجة لتوسيع المجموعة ط الى مجموعة أخرى بحيث يمكن اجراء العمية ٥—٧ في تلك المجموعة . وهذا ما سنتعرف عليه في البنود اللاحقة .

نظرية:

اذا كان ٲ ، ب ∋ ط فانه يمكن طرح ب من ٲ ⇔ ب ≤ ٲ .

البرهان:

نفرض انه يمكن طرح ب من ٲ وعليه فانه يوجد عدد مثل حـ ∋ ط بحيث ٲ − ب = جـ

إذن ٲ = ب + حـ وعليه فان ب < ٲ .

واذا كانت حـ = صفر فان ٲ = ب .

وبالعكس نفرض ان ب ≤ ٲ . فاذا كانت ب = ٲ فان:

ٲ = ب + ٠ وعليه فان ٲ − ب = صفر.

واذا كانت ب < ٲ فان ٲ = ب + حـ وعليه فان ٲ − ب = حـ اي يمكن طرح ب من ٲ وهو المطلوب .

والان لنسأل السؤال التالي:

اذا كان أ ، ب ∈ ط وكان ب ≠ صفر فهل يوجد عدد طبيعي مثل ح بحيث يكون أ = ب × ح ؟

بما ان أ ، ب عددين طبيعيين فان احد الاحتمالات التالية صحيحة:

١) أ = ب وعليه فان أ = ب × ١ حيث ح = ١ ∈ ط .

٢) أ > ب وعليه فان .

أ = ب + ح وفي هذه الحالة من الممكن ان تكون ب = ح فيكون أ
= ب + ب = ب (١ + ١) = ب × ٢
وعليه فان ح = ٢ او ان تكون ح > ب حيث ح = ب + د
اذن أ = ب + ح = ب + ب + د
= ب (١+١) + د

وهلم جرّا حيث د أيضاً ممكن ان تكون اكبر من ب فيمكن كتابتها د = ب + هـ حيث يمكن ان نكتب أ = م ب او لا نستطيع .

٣) أ < ب وفي هذه الحالة لا يمكن ان تكون أ = ب × ح لذلك من الممكن ان تكون أ = ب × ح او لا تكون.

وعليه فانه في بعض الحالات يوجد عدد مثل ح بحيث أ = ب × ح .

فمثلاً ٨ = ٢ × ٤ ولكن لا يمكن ايجاد ح ∈ ط١٠ بحيث: ٨ = ٣ × ح .

تعريف:

اذا كان أ ، ب عددان طبيعيان وكان ب ≠ ووجد عدد طبيعي ح بحيث يكون:

أ = ب × ح فاننا نكتب:

ح = أ ÷ ب وتقرأ أ تقسيم ب .

هذا ويمكن ان يكون ناتج قسمة عددين طبيعين يعطي عدداً طبيعياً كثل ٨÷٤=٢ او لا يعطي مثل ٨÷٣ ليس عدداً طبيعيا .

لهذا فان هناك حاجة لتوسيع المجموعة ط ليصبح من الامكان اجراء عملية القسمة فيها .

[١-٢] مجموعة الاعداد الصحيحة:

تطرقنا في البند السابق الى الاعداد الطبيعية والصفر وخواص عمليتي الضرب والجمع ثم تعرضنا الى عمليتي القسمة والطرح. وفي هذا البند سنتطرق الى مجموعة الاعداد الصحيحة كامتداد للاعداد الطبيعية وبعض الخواص المهمة للاعداد الصحيحة.

مفهوم الأعداد الصحيحة كامتداد للاعداد الطبيعية:

اذا كانت أ+س = ب حيث أ ، ب ∈ ط فان:

س = ب − أ يعتبر حلا للمعادلة (من تعريف الطرح على ط). ولا يمكن ان نحصل على هذا الحل في المجموعة ط إلا اذا كان أ ≤ ب.
ولكن لو كان أ > ب فهل يوجد حل في مجموعة الاعداد الطبيعية، والجواب طبعا لا. فمثل هذه الأسئلة أوجبت التفكير في ايجاد اعداد أخرى تفي بحل مثل هذه المعادلات.

تكوين الاعداد الصحيحة

لتكن المجموعة ط×ط = {(أ ، ب): أ ، ب ∈ط} ولنعرف العلاقة (∼) على المجموعة ط×ط بالشكل التالي:

(أ ، ب) ∼ (حـ، ى) ⟺ أ+ى = ب + حـ فمثلاً

(٣ ، ٤) ∼ (٥ ، ٦) لان ٣+٦ = ٤+٥

كذلك (٣، ٤) ∼ (٧، ٨) لأن ٣+٨ = ٤+٧

ان العلاقة (∼) علاقة تكافؤ على ط×ط واليك برهان ذلك:

١) (أ ، ب) ∼ (أ ، ب) لان أ + ب = ب + أ من خاصية التبديل لعملية الجمع على مجموعة الاعداد الطبيعية.

اذن ∼ علاقة انعكاس.

٢) اذا كان (أ ، ب) ∼ (حـ ، ى) فان (حـ، ى) ∼ (أ ، ب)

والسبب في ذلك أنه (أ ، ب) ∼ (حـ ، ى) ⟺ أ + ى = ب + حـ ... (١)

كذلك (حـ، ء) ~ (أ، ب) ⟺ حـ + ب = ء + أ وهذا صحيح من (١)

اي ان العلاقة علاقة تماثل.

٣) اذا كان (أ، ب) ، (حـ، ء) ، (هـ، و) ∈ ط×ط وكان:
(ا، ب) ~ (حـ، ء) ، (حـ، ء) ~ (هـ، و) فان (أ، ب) ~ (هـ، و)

وذلك لان:

(أ، ب) ~ (حـ، ء) ⟺ أ + ء = ب + حـ ...(٢)
كذلك (حـ، ء) ~ (هـ، و) ⟺ حـ+و = ء+هـ ...(٣)
إذن (أ+ء) + (حـ+و) = (ب+حـ) + (ء+هـ) وذلك بجمع (٢)،(٣)
إذن أ+(ء+(حـ+و)) = ب+(حـ+(ء+هـ)) خاصية التجميع على الجمع
أ+(ء+حـ) + و = ب+(حـ + ء) +هـ
(أ+و) + (ء+حـ) =(ب+هـ)+(حـ+ء) خاصية التبديل
(أ+و) + (حـ،ء) = (ب+هـ) + (حـ،ء) وحسب قانون الحذف
فإن أ+و = ب+هـ
أي أن (أ،ب) ~ (هـ،و)

أي أن العلاقة علاقة تعدي. لذلك فهي علاقة تكافؤ.

من المعروف أن اية علاقة تكافؤ على مجموعة تجزىء المجموعة الى مجموعات جزئية كل منها يسمى صف تكافؤ. وهنا العلاقة ~ تجزىء المجموعة ط×ط الى صفوف تكافؤ بالشكل التالي:

$$ص = \left\{ \begin{array}{l} [٠،٠] ، [٠،١] ، [٠،٢] ، \dots \\ [١،٠] ، [١،١] ، [١،٢] ، \dots \\ [٢،٠] ، [٢،١] ، [٢،٢] ، \dots \end{array} \right\}$$

وكل صف تكافؤ عبارة عن مجموعة من الازواج المرتبة فمثلا:

[٠،٠] = {(٠،٠) ، (١،١) ، (٢،٢)، ...}

[١،٠] = {(١،٠) ، (٢،١) ، (٣،٢) ،...}

[٠،١] = {(٠،١) ، (١،٢) ، (٢،٣) ، ...}

[٠،٢] = {(٠،٢) ، (١،٣) ، (٢،٤) ، ...}

وكل صف تكافؤ يمثل عدداً صحيحاً. فمثلا (٠،٠) ، (١،١) ، (٢،٢) ، ... تمثل عدداً صحيحاً واحداً.

وكذلك (١،٠) ، (٢،١) ، (٣،٢) ، ... تمثل عدداً صحيحاً آخر وهكذا.

وإذا رمزنا لصف التكافؤ [٠،٣] بالرمز ـ٣

[٠،٢] بالرمز ـ٢

[٠،١] بالرمز ـ١

[٠،٠] بالرمز ٠

[١،٠] بالرمز ١

[٢،٠] بالرمز ٢ وهكذا

فإننا نستطيع ان نكتب مجموعة الاعداد الصحيحة بالشكل التالي:

ص = {...، ـ٣، ـ٢، ـ١، ٠، ١، ٢، ٣، ...}

وهكذا جاءت فكرة الاعداد الصحيحة حيث سميت الاعداد:

{١، ٢، ٣، ...} بالاعداد الصحيحة الموجبة والاعداد {ـ١، ـ٢، ـ٣، ...} بالاعداد الصحيحة السالبة. واما الصفر فلا يعتبر موجباً أو سالباً.

الجمع على الاعداد الصحيحة:

تعريف:

اذا كان [أ،ب] ، [ح،ى] ∈ ص فإن:

[أ،ب] + [ح،ى] = [أ+ح ، ب+ى] فمثلا

[١،٢] + [٣،٤] = [٤،٦].

خواص عملية الجمع على ص

١) عملية الجمع مغلقة وذلك لأنه:

اذا كانت أ ،ب ،حـ ،د أعداداً طبيعية فان:

ا+ جـ ، ب+ د اعداد طبيعية وعليه فإن:

[أ+ حـ ، ب+ د] عدد صحيح . اي ان عملية الجمع مغلقة على مجموعة الاعداد الصحيحة لان حاصل جمع عددين صحيحين يعطي عدداً صخيحاً .

٢) عملية الجمع تبديلية . أي [أ ،ب] + [حـ ،د] = [حـ ،د] + [أ ،ب]

وذلك لان [أ ،ب] + [حـ ،د] = [أ+ حـ ، ب+ د] وبالمثل

[حـ ،د] + [أ ،ب] = [حـ+ أ ، د+ ب]

وبما أن أ+ حـ = حـ+ أ (من خاصية التبديل على مجموعة الاعداد ط)

ب+ د = د+ ب

اذن عملية الجمع على ص تبديلية .

٣) عملية الجمع تجميعية . أي أن:

[أ ،ب] +([حـ ،د] + [هـ ،و]) = ([أ ،ب] + [حـ ،د]) + [هـ ،و]

وذلك لأنه:

[أ ،ب] + ([حـ ،د] + [هـ ،و]) = [أ+ حـ+ هـ ، ب+ د+ و]

وبالمثل يمكن بيان ان ([أ ،ب] + [حـ ،د]) + [هـ ،و] =

[أ+ حـ+ هـ ، ب+ د+ و]

اذن عملية الجمع تجميعية على ص .

عملية الضرب على الاعداد الصحيحة:

تعريف:

اذا كان [أ ،ب] ، [حـ ،د] $\in$ ص فإن:

[أ ،ب] × [حـ ،د] = [أ × حـ + ب × د ، أ × د + ب × حـ]

فمثلاً:

[٢، ٣] × [٣، ٤] = [٢×٣+٣×٤ ، ٢×٤+٣×٣] =
[١٨، ١٧]

خواص عملية الضرب على الاعداد الصحيحة:

١) عملية الضرب على مجموعة الاعداد الصحيحة مغلقة وذلك لأنه:

[ا، ب] × [ح، ى] = [ا×ح+ب×ى ، ا×ى+ب×ح]

لكن ا، ب، ح، ى ∈ ط لذلك فإن ا×ح، ب×ى ، ا×ى ، ب×ح كلها اعداد في ط لان عملية الضرب لها خاصية التبديل على مجموعة الاعداد ط

كذلك فإن (ا×ح+ب×ى)، (ا×ى+ب×ح) تنتمي الى ط .

لذلك فإن: [ا×ح+ب×ى ، ا×ى+ب×ح] عدد صحيح .

٢) عملية الضرب لها خاصية التبديل على مجموعة الأعداد الصحيحة . اي أن

[ا، ب]×[ح، ى] = [ح، ى]×[ا، ب] وذلك لان

[ا ، ب] × [ح ، د] = [ا×ح+ب×د ، ا×د+ب×ح]

=[ح×ا+ى×ب ، ى×ا+ح×ب] خاصية التبديل على الجمع والضرب على ط

=[ح، ى]×[ا، ب]

٣) عملية الضرب لها خاصية التجميع على مجموعة الأعداد الصحيحة. وذلك لأن

[ا، ب] × ([ح، ى] × [هـ، و])

= [ا، ب] × [ح×هـ + ى×و ، ح×و + ى×هـ]

= [ا×(ح×هـ+ى×و)+ب(ح×و+ى×هـ)، ا(ح×و+ى×هـ)
+ ب(ح×هـ+ى×و)]

= [ا×ح×هـ+ا×ى×و+ب×ح×و+ب×ى×هـ،

أ×حـ×و + أ×ء×هـ + ب×حـ×هـ + ب×ء×و]

= [(أ×حـ×هـ + ب×ء×هـ) + (أ×ء×و + ب×حـ×و)،

(أ×حـ×و + ب×ء×و) + (أ×ء×هـ + ب×حـ×هـ)]

= [(أ×حـ + ب×ء)هـ + (أ×ء + ب×حـ)و،

(أ×حـ + ب×ء)و + (أ×ء + ب×حـ)هـ]

= [أ×حـ + ب×ء ، أ×ء + ب×حـ] × [هـ، و]

= ([أ، ب] × [حـ، ء]) × [هـ، و] وهو المطلوب.

٤) عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع لان:

[أ، ب] × ([حـ، ء] + [هـ، و]) = [أ، ب] × [حـ + هـ، ء + و]

= [أ(حـ + هـ) + ب(ء + و)، أ(ء + و) + ب(حـ + هـ)]

= [(أ×حـ + أ×هـ) + (ب×ء + ب×و)،

(أ×ء + أ×و) + (ب×حـ + ب×هـ)]

= [(أ×حـ + ب×ء) + (أ×هـ + ب×و)،

(أ×ء + ب×حـ) + (أ×و + ب×هـ)]

= [أ×حـ + ب×ء، أ×ء + ب×حـ] +

[أ×هـ + ب×و، أ×و + ب×هـ]

= ([أ، ب] × [حـ، ء]) + ([أ، ب] × [هـ، و])

اذن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع

وهو المطلوب

والآن سنتعرف على المزيد من خواص عمليتي الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الصحيحة.

١) **ليكن** +م، +د عددين صحيحين فان

١) (+م) + (+د) = +(م + د)

البرهان

(+م) = [م، ٠] كذلك (+د) = [د، ٠]

اذن (+م) + (+د) = [م، ٠] + [د، ٠] = [م+د، ٠]

= +(م+د) وذلك من تعريف الجمع

ب) (−م) + (−د) = −(م+د)

البرهان

(−م) + (−د) = [٠، م] + [٠، د] = [٠، م+د] = −(م+د) وهو المطلوب.

نتيجة:

لجمع عددين صحيحين متشابهين في الاشارة فإننا نجمعهما على أساس أنهما اعداداً طبيعية ثم نضع الاشارة ام الناتج.

٢) (+م) + (−د) =
- +(م−د) اذا كانت م > د
- صفر اذا كانت د = م
- −(د−م) اذا كانت د > م

البرهان

(+م) + (−د) = [م، ٠] + [٠، د]

[م، د] حسب تعريف الجمع

فإذا كانت م > د فإن:

[م، د] = [م−د ، د−د] = [م−د ، ٠]

= +(م−د)

لاحظ ان [٣، ٢] = [٣−٢ ، ٢−٢] = [١، ٠] = ١

ولهذا السبب كتبنا [م، د] = [م−د ، د−د] = [م−د ، ٠]

اما اذا كانت د = م فإن:

[م، د] = [م−د ، د−د] = [٠، ٠] = صفر

ولكن اذا كانت د > م فإن:

[م، د] = [م−م ، د−م] = [٠ ، د−م]

= −(د−م) وهو المطلوب

نتيجة

لجمع عددين صحيحين مختلفين في الإشارة فإننا نجد الفرق بينهما على أساس انهما اعداد طبيعية ثم نضع اشارة العدد الاكبر فيهما امام الناتج فمثلا :

$(+٧) + (-٥) = +٢$

لكن $(+٥) + (-٧) = -٢$

ملاحظة:

صف التكافؤ [٠، ٠] هو الصف المحايد بالنسبة لعملية الجمع على الأعداد الصحيحة لأن:

[ا، ب] + [٠، ٠] = [٠، ٠] + [ا، ب] = [ا، ب]

كذلك فانه يوجد نظير لكل عنصر في ص فمثلا نظير (+ م) هو (- م) وكصفوف تكافؤ فإن:

نظير [م، ٠] هو [٠، م] لان:

[م، ٠] + [٠، م] = [م، م] = [م - م ، م - م] = [٠، ٠]

٣) اذا كانت م، ن اعداداً صحيحه فإن:

ا) (+ م) × (+ ن) = + (م × ن) وذلك لأن:

(+ م) × (+ ن) = [م، ٠] × [ن، ٠]

= [م × ن + ٠ × ٠ ، م × ٠ + ٠ × ن] حسب تعريف الضرب

= [م × ن ، ٠] = + (م × ن)

ب) (- م) × (- ن) = + (م × ن)

وذلك لأنه:

(- م) × (- ن) = [٠، م] × [٠ ، ن]

= [٠ × ٠ + م × ن ، ٠ × ن + م × ٠] = [م × ن ، ٠]

= + (م × ن)

نتيجة:

إذا ضربنا عددين صحيحين لهما نفس الإشارة فإننا نضربهما على اساس انهما اعداد في ط ثم نضع اشارة + امام الناتج

٤) ا) (+م) × (—د) = —(م×د) وذلك لأن:

(+م) × (—د) = [م، ٠] × [٠، د]

= [م×٠ + ٠×د ، م×د + ٠×٠]

= [٠ ، م×د] = —(م×د)

ب) —م × (+د) = —(م×د) وذلك لأن

—م × (+د) = [٠، م] × [د، ٠]

= [٠×د + م×٠ ، ٠×٠ + م×د]

= [٠، م×د] = —(م×د)

نتيجة:

لضرب عددين صحيحين مختلفين في الإشارة فإننا نجري عملية الضرب على أساس انهما اعداد في ط ثم نضع اشارة (—) امام الناتج

٥) ا) (+م) × ٠ = ٠ وذلك لأن:

(+م) × ٠ = [م، ٠] × [٠، ٠]

= [م×٠ + ٠×٠ ، م×٠ + ٠×٠] = [٠، ٠]

= ٠

ب) (—م) × ٠ = ٠ وذلك لأن:

(—م) × ٠ =

[٠، م] × [٠، ٠] = [٠×٠ + م×٠ ، ٠×٠ + م×٠]

= [٠، ٠] = ٠

نتيجة

اذا ضرب اي عدد صحيح في صفر فان الناتج يساوي صفراً.

ملاحظة:

العنصر + ١ في الأعداد الصحيحة هو عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب وذلك لأنه لكل م ∋ ص:

١ × م = م × ١ = م وبرهان ذلك كما يلي:

١ × م = [١ ، ٠] × [م ، ٠] = [م + ٠ ، ٠ + ٠] = [م ، ٠] = م

وبالمثل م × ١ = م

ولكن لا يوجد نظير ضربي لكل عنصر في الاعداد الصحيحة ماعدا + ١ ، — ١ حيث نظير + ١ = + ١ ، نظير — ١ = — ١

وذلك لأنه:

[١ ، ٠] × [١ ، ٠] = [١ × ١ + ٠ × ٠ ، ١ × ٠ + ٠ × ١]

[١ ، ٠] أي أن (+ ١) × (+ ١) = + ١

كذلك (— ١) × (— ١) = [٠ ، ١] × [٠ ، ١]

= [٠ × ٠ + ١ × ١ ، ٠ × ١ + ١ × ٠]

= [١ ، ٠] = + ١

عملية الطرح على الاعداد الصحيحة

تعريف:

اذا كان سـ ، صـ عددين صحيحين فان سـ — صـ = عـ حيث عـ = سـ + (— صـ) ، عـ ∋ صـ .

أي بمعنى آخر اذا طرح عدد صحيح مثل صـ من عدد صحيح آخر مثل سـ فمعنى ذلك اننا نضيف إلى سـ النظير الجمعي للعدد صـ .

فمثلا (+ ٩) — (+ ١١) = (+ ٩) + (— ١١) = — ٢

كذلك ٠ — (+ ٥) = ٠ + (+ ٥) = ٥

ومن الجدير بالملاحظة ان عملية الطرح على مجموعة الاعداد الصحيحة مغلقة ولكنها ليست تبديلية ولا تجميعية .

القسمة على الاعداد الصحيحة:

تعريف:

اذا كان سـ ، صـ عددين صحيحين ووجد عدد صحيح آخر مثل ع بحيث سـ = صـ × ع فإننا نقول ان:

سـ ÷ صـ = ع ولكن من المحتمل ان لا تكون ع عدداً صحيحاً.

ومعنى ذلك ان عملية القسمة ليست مغلقة على الاعداد الصحيحة.

فمثلا ٣ ÷ ٢ ∌ صـ وذلك لعدم وجود حـ ∈ صـ بحيث

٢حـ = ٣

لهذا فان هناك حاجة الى مجموعة أخرى من الاعداد تتم فيها عملية القسمة. وحسب تعريف القسمة على الاعداد الصحيحة فإنه لا يمكن قسمة أية عدد صحيح مثل سـ على صفر لأنه لا يوجد عدد صحيح مثل ع بحيث اذا ضرب في العدد صفر يعطي العدد سـ

هذا واذا كانت سـ ÷ صـ = ع وكان كل من سـ ، صـ ، ع أعداد صحيحه فإننا نقول أن سـ يقبل القسمة على صـ أو نقول أن صـ قاسم من قواسم سـ أو عامل من عوامل سـ. ويرمز لها بالرمز. صـ | سـ حيث الاشارة (|) تعني تقسم.

علاقة الترتيب في مجموعة الأعداد الصحيحة:

هناك نوعان من علاقات الترتيب هما:

ا) علاقة الترتيب الجزئي:

نقول أن العلاقة ع علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة صـ اذا كانت تحقق الشروط التالية:

١) ع علاقة إنعكاس على صـ. بمعنى ان كل عنصر مرتبط مع نفسه بالعلاقة ع. اي أن أ ع أ لكل أ ∈ صـ

٢) ع علاقة تخالفية على صـ. اي أنه اذا كانت أ ع ب فان ب ع أ

فقط في حالة كون أ = ب لكل أ ،ب ∈ص

٣) ع علاقة تعدي على ص . بمعنى انه اذا كانت أ ع ب ، ب ع حـ فان أ ع حـ .

مثال :

اذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٦، ٨، ١٢} فإن العلاقة أ | ب على المجموعة س علاقة ترتيب جزئي على المجموعة س . حيث أ | ب تعني ان أ تقسم ب وذلك لان هذه العلاقة

١) علاقة انعكاس حيث كل عنصر يقسم نفسه . فمثلا ٣|٣ ، ١|١ ، . . .

٢) العلاقة تخالفية لأن أ | ب ، ب | أ فقط في حالة كون أ=ب . اما لبقية الأعداد فإنه اذا كانت أ | ء فإن ء ∤ أ .

لاحظ ان ٣ | ٦ لكن ٦ ∤ ٣ .

٣) العلاقة تعدي لأنه اذا كان أ | ب ، ب | حـ فان أ | حـ فمثلا ٣|٦ ، ٦ | ١٢ كذلك ٣ / ١٢ .

لكن علاقة ($<$) على مجموعة الاعداد الصحيحة ليست علاقة ترتيب جزئي لان العلاقة ليست انعكاسية .

ب) علاقة الترتيب الكلي (الترتيب التام) :

نقول عن العلاقة ع بأنها علاقة ترتيب كلي (تام) على مجموعة الاعداد الصحيحة ص اذا تحققت الشروط التالية :

١) ع علاقة ترتيب جزئي . اي تحقق ما يلي :

ا) علاقة انعكاس

ب) علاقة تخالف .

جـ) علاقة تعدي .

٢) ان تكون ع تامه المقارنة بمعنى انه لجميع قيم أ ،ب ∈ص فانه يكون اما أ ع ب أو أ = ب أو ب ع أ

علاقة $\leqslant$ على مجموعة الاعداد الصحيحة ص علاقة ترتيب كلي وذلك

لأنها .

١) علاقة انعكاس حيث كل عنصر مرتبط مع نفسه بالعلاقة ع .

٢) علاقة تخالف حيث انه اذا كان أ $\leqslant$ ب فلا يمكن ان يكون ب $\leqslant$ أ الا اذا كان أ = ب

٣) علاقة تعدي حيث انه اذا كان أ $\leqslant$ ب ، ب $\leqslant$ حـ فان أ $\leqslant$ حـ .

فالعلاقة علاقة ترتيب جزئي .

٤) العلاقة تامة المقارنة حيث انه لاية عنصرين من ص فإنه يكون أ $\leqslant$ ب أو أ = ب أو ب $\leqslant$ أ . اذن العلاقة علاقة ترتيب كلي .

نلاحظ مما سبق أن النظام الرياضي (ص، +، ×) يشكل حلقة تسمى حلقة الاعداد الصحيحة وذلك لأن:

١) (ص، +) زمره تبديلية . أي أن عملية الجمع مغلقة وتجميعية وتبديلية على ص ، كما يوجد عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمع هو الصفر ولكل عنصر أ نظير جمعي هو ـأ

٢) (ص، ×) شبه زمره (نصف زمره) اي ان عملية الضرب مغلقة على ص وهي تجميعية .

٣) تتوزع عملية الضرب على عملية الجمع .

والسؤال الذي ينشأ هو: هل هذه الحلقة مرتبة؟ أي هل يوجد مجموعة س $\subset$ ص بحيث ان:

١) اذا كان أ $\in$ ص فان واحدة فقط من العبارات التالية صحيحة:

أ $\in$ س أو أ = صفر أو ـأ $\in$ س

٢) اذا كانت أ، ب $\in$ س فإن:

أ + ب $\in$ س ، أ × ب $\in$ س

وللإجابة على هذا السؤال لنأخذ س = ص+ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبه . فواضح ان ص+ $\subset$ ص وتحقق الشرطين المطلوبين سابقاً . اذن (ص، +، ×) حلقة مرتبة .

[١ ـ ٣] مجموعة الأعداد النسبية

لقد تطرقنا في البند السابق إلى مجموعة الاعداد الصحيحة وكيفية تكوينها باستخدام الضرب الديكارتي لمجموعة الاعداد الطبيعية وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى مجموعة الاعداد النسبية وتكوينها باستخدام الضرب الديكارتي لمجموع الاعداد الصحيحة صـ X صـ*

هذا وقد لاحظنا ان الحاجة هي التي دعت إلى تكوين الاعداد الصحيحة لإنه كان هناك كثيراً من المعادلات التي ليس لها حل في مجموعة الاعداد الطبيعية .

وكذلك الحاجة دعت إلى تكوين مجموعة الاعداد النسبية فهناك الكثير من المعادلات التي ليس لها حل في مجموعة الصحيحة

ومثال ذلك .

١) ٣سـ = ٥ ٣) ٦سـ = ١١

٢) ٢سـ = ٧ ٤) ٥سـ = ١٣

والآن دعنا نرى كيف تكونت مجموعة الاعداد النسبية ن .

تكوين مجموعة الاعداد النسبية: ك

لنأخذ المجموعة ص~ حيث ص~ مجموعة الاعداد الصحيحة

ولنأخذ المجموع ص~* حيث ص~* = ص~ − {}

ثم نكون الضرب الديكارتي للمجموعتين

ص~ × ص~* = {(أ ، ب) : أ ∈ ص~ ، ب ∈ ص~*}

ولنعرف علاقة على الضرب الديكارتي مثل العلاقة ~ على الشكل التالي:

(أ ، ب) ~ (جـ ، د) ⇔ أ × د = ب × جـ

حيث (أ ، ب)، (جـ ، د) ∈ ص~ × ص~*

نلاحظ أن هذه العلاقة على المجموعة ص~ × ص~* علاقة تكافؤ وإليك البرهان:

١) (أ، ب) ~ (أ، ب) لأن أ × ب = ب × أ وذلك من خاصية التبديل على مجموعة الاعداد الصحيحة

∴ العلاقة ~ علاقة انعكاس على ص~ × ص~*

٢) اذا كان (أ، ب) ~ (جـ، د) فان (جـ، د) ~ (أ، ب)

وذلك لأن

(أ، ب) ~ (جـ، د) ⇐ أ × د = ب × جـ

⇐ د × أ = جـ × ب خاصية التبديل

⇐ جـ × ب = د × أ

∴ (جـ، د) ~ (أ، ب)

أي أن العلاقة ~ لها خاصية التماثل على ص~ × ص~*

٣) اذا كان (أ، ب) ~ (جـ، د)، (جـ ، د) ~ (هـ ، و).

فإن (أ ، ب) ~ (هـ ، و)

البرهان:

(أ، ب) ~ (ح، د) ⇐ أ × د = ب × ح بضرب الطرفين في و

⇐ (أ × د) × و = (ب × ح) × و .... (١)

كذلك (ح، د) ~ (هـ، و) ⇐ ح × و = د × هـ بالضرب في ب

⇐ ب × (ح × و) = ب × (د × هـ)...(٢)

من المعادلتين (١، ٢) ينتج أن

(أ × د) × و = (ب × ح) × و = ب × (د × هـ)

أي أن

أ × د × و = ب × د × هـ من خاصية التجميع على الاعداد الطبيعية

∴ د × (أ × و) = د × (ب × هـ) وحسب خاصية الاختزال

∴ أ × و = ب × هـ

أي أن (أ، ب) ~ (هـ، و)

أي أن العلاقة علاقة تعدي

بما أن العلاقة انعكاس وتماثل وتعدي فالعلاقة ~ علاقة تكافؤ على المجموعة ص × ص*

امثلة على العلاقة ~

(١، ٢) ~ (٢، ٤) لأن ١ × ٤ = ٢ × ٢

(−٢، −٤) ~ (٢، ٤) لأن −٢ × ٤ = −٤ × ٢

(−١، ٣) ~ (٣، −٩) لأن (−١) × (−٩) = ٣ × ٣

وهكذا

والآن بما أن العلاقة ~ علاقة تكافؤ على المجموعة ص × ص* فإنها تجزىء هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية كل منها يسمى صف تكافؤ.

ومجموع صفوف التكافؤ هذه منتهية ولها الخواص التالية:

١) ليس أي منها مجموعة خالية

٢) تقاطع أي صفي تكافؤ يعطي المجموعة الخالية ∅

٣) اتحاد جميع صفوف التكافؤ يعطي المجموعة الكلية ص × ص* ومن صفوف التكافؤ هذه

[١، ١] = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)....، (—١، —١)، (—٢، —٢)، (—٣، —٣)، ...}

[١، ٢] = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)...، (—١، —٢)، (—٢، —٤)، (—٣، —٦)...}

[٢، ٣] = {(٢، ٣)، (٤، ٦)، (٦، ٩)....، (—٢، —٣)، (—٤، —٦)، (—٦، —٩)...}

[٠، ١] = {(٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٣)....، (٠، —١)، (٠، —٢)، (٠، —٣)...}

[٢، ١] = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)...، (—٢، —١)، (—٢، —٤)، (—٦، —٣)، (—٨، —٤)...}

[٣، ١] = {(٣، ١)، (٦، ٢)، (٩، ٣)....، (—٣، —١)، (—٦، —٢)، (—٩، —٣)...}

[٣، —١] = {(٣، —١)، (—٣، ١)، (٦، —٢)، (—٦، ٢)...}

تُعرَّف مجموعة الاعداد النسبية ن على أنها مجموعة صفوف التكافؤ حيث:

ن = {[١، ١]، [١، ٢]، [٢، ٣]، [٠، ١]، [٢، ١]، [٣، ١]، [٣، —١]، ... }

هذا ويجب أن نلاحظ ان كل عنصر من عناصر أي صف تكافؤ يمكن أن يكون نفسه صف تكافؤ.

هذا وإن كل صف تكافؤ يمثل عدداً يسمى عدداً نسبياً.

هذا وإذا رمزنا لصفوف التكافؤ كل منها برمز مثلاً

[أ، ب] = $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ ص ، ب ∈ ص*

فإن هذا يقود إلى اسلوب آخر لتعريف العدد النسبي كما يلي:

العدد النسبي هو العدد الذي يمكن كتابته على الصيغة التالية:

$\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ ص ، ب ∈ ص*

امثلة :

رمزها

[١، ١] ← $\frac{١}{١}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٣}{٣}$ ، $\frac{٤}{٤}$ ، .... ، $\frac{-١}{-١}$ ، $\frac{-٢}{-٢}$ ، $\frac{-٣}{-٣}$ ، ....

[٠، ١] ← $\frac{٠}{١}$ ، $\frac{٠}{٢}$ ، $\frac{٠}{٣}$ ، .... ، $\frac{٠}{-١}$ ، $\frac{٠}{-٢}$ ، $\frac{٠}{-٣}$ ، ....

[٢، ٣] ← $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٦}{٩}$ ، .... ، $\frac{-٢}{-٣}$ ، $\frac{-٤}{-٦}$ ، ....

[١، ٢] ← $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، .... ، $\frac{-١}{-٢}$ ، $\frac{-٢}{-٤}$ ، $\frac{-٣}{-٦}$ ، ....

وعليه فإن المجموعة ن يمكن ان تكتب بالشكل التالي

ن = { .... ، $\frac{-٣}{١}$ ، $\frac{-٢}{١}$ ، $\frac{-١}{١}$ ، $\frac{٠}{١}$ .... ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، .... ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، ....}

ونلاحظ ان كل عدد صحيح يمكن ان يكتب على صورة عدد نسبي كما ان كل عدد نسبي يكتب بصور مختلفة .

فمثلا :

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، .... ، $\frac{-١}{-٢}$ ، $\frac{-٢}{-٤}$ ، $\frac{-٣}{-٦}$ ، ....

كلها صور مختلفة لنفس العدد النسبي $\frac{١}{٢}$

الجمع على مجموعة الأعداد النسبية ك

تعريف:

اذا كان [أ ، ب]، [حـ ، ء] عددين نسبيين فإن [أ ، ب] + [حـ ، ء] = [أ × ء + ب × حـ ، ب × ء]

وبشكل آخر

$$\frac{أ}{ب} + \frac{حـ}{ء} = \frac{أء + ب حـ}{ب ء}$$

ومن خواص عملية الجمع على ك انها

(١) عملية مغلقة وذلك لان

[أ × ء + ب × حـ ، ب × ء] عدد نسبي ايضاً وذلك لان

أ × ء + ب × حـ عدد صحيح

كذلك ب × ء عدد صحيح ≠ صفر لأن ب ≠ صفر، ء ≠ صفر أي ان عملية الجمع على مجموعة الاعداد النسبية عملية مغلقة لان حاصل جمع عددين نسبيين يعطي عدداً نسبياً.

مثال

[٢، ٣] + [٤، ٥] = [٢ × ٥ + ٣ × ٤ ، ٣ × ٥]

[٢٢، ١٥]

$$= \frac{٢٢}{١٥}$$

حيث [٢ ، ٣] $= \frac{٢}{٣}$

[٤ ، ٥] $= \frac{٤}{٥}$.

أي أن $\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٥} = \frac{٢٢}{١٥}$

٢) اذا كان (أ ، ب) ~ (حـ،ى)، (هـ،و) ~ (ع ، ل)

فإن [أ ، ب] + [هـ ، و] = [حـ ، د] + [ع ، ل].

وذلك لأن (أ ، ب) ~ (حـ،ى) تعنى ان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$

وكذلك (هـ،و) ~ (ع ، ل) تعنى $\frac{هـ}{و} = \frac{ع}{ل}$

∴ بجمع الاطراف المتناظرة ينتج ان

$$\frac{أ}{ب} + \frac{هـ}{و} = \frac{حـ}{ى} + \frac{ع}{ل}$$

مثال (١، ٢) ~ (٢، ٤) ، (٢، ٣) ~ (٦، ٩)

∴ (١، ٢) + (٢، ٣) = (٢، ٤) + (٦، ٩)

[(١ × ٣) + (٢ × ٢)، ٢ × ٣] = [(٢ × ١) + (٤ × ٦)، ٤ × ٩]

(٧، ٦) = (٤٢، ٣٦)

$$\frac{٧}{٦} = \frac{٤٢}{٣٦}$$

٣) عملية الجمع تبديلية لأن

[أ، ب] + [حـ، ى] = [حـ، ى] + [أ، ب]

البرهان:

[أ، ب] + [حـ، ى] = [أ × ى + ب × حـ، ب × ى]

= [ب × حـ + أ × ى، ب × ى] خاصية التبديل للاعداد الصحيحة

= [حـ × ب + ى × أ، ى × ب] خاصية التبديل

= [حـ، ى] + [أ، ب]

مثال

[٢، ٣] + [٣، ٤] = [٢ × ٤ + ٣ × ٣، ٣ × ٤]

= [٣ × ٣ + ٤ × ٢، ٤ × ٣]

= [٣، ٤] + [٢، ٣]

٤) عملية الجمع تجميعية أي أن

[أ، ب] + ([جـ، د] + [هـ، و]) = ([أ، ب] + [جـ، د]) + [هـ، و]

البرهان:

[أ، ب] + ([جـ، د] + [هـ، و]) = [أ، ب] + [جـ × و + د × هـ ، د × و]

= [أ (د × و) + ب (جـ × و + د هـ) ، ب (د × و)]

= [أ × د × و + ب × جـ × و + ب × د × هـ ، ب × د × و]

= [(أ × د + ب × جـ) و + ب × د × هـ ، ب × د × و]

= ([أ، ب] + [جـ، د]) + [هـ، و]

عملية الضرب على مجموعة الاعداد النسبية

تعريف:

اذا كان [أ، ب]، [جـ، د] عددين نسبيين فإن:

[أ، ب] × [جـ، د] = [أ × جـ، ب × د]

مثال:

[٢، ٥] × [٣، ٤] = [٢ × ٣، ٥ × ٤]

= [٦ ، ٢٠]

= $\frac{٦}{٢٠}$

ومن خواص عملية الضرب على ن أنها

١) عملية مغلقة: وهذا واضح من التعريف

أن ان حاصل ضرب عددين نسبيين يعطي عدداً نسبياً، بمعنى ان عملية الضرب على مجموعة الأعداد النسبية عملية ثنائية مغلقة.

٢) اذا كان (أ، ب) ~ (جـ، د)، (هـ، و) ~ (ل، ع) فإن

[أ، ب] × [هـ، و] = [حـ، ء] × [ع، ل]

مثال:

اذا كان (١، ٥) ~ (٣، ١٥)، (١، ٢) ~ (٢، ٤) فإن

[١، ٥] × [١، ٢] = [٣، ١٥] × [٢، ٤]

وذلك لان

[١، ٥] × [١، ٢] = [١×١، ٥×٢]

وبالمثل [٣، ١٥] × [٢، ٤] = [٣×٢، ١٥×٤]

ولكن (١، ١٠) ~ (٦، ٦٠)

∴ [١، ١٠] = [٦، ٦٠]

٣) عملية الضرب لها خاصية التبديل على مجموعة الاعداد النسبية ن أي أن

[أ، ب] × [حـ، ء] = [حـ، ء] × [أ، ب]

البرهان:

[أ، ب] × [حـ، ء] = [أ × حـ، ب × ء]

= [حـ × أ، ء × ب] خاصية التبديل على الاعداد الصحيحة

= [حـ، ء] × [أ، ب]

وهو المطلوب

٤) عملية الضرب لها خاصية التجميع على مجموعة الاعداد النسبية ن .

[أ، ب] × ([حـ، ء] × [هـ، و]) = ([أ، ب] × [حـ، ء]) × [هـ، و]

البرهان:

[أ، ب] × ([حـ، ء] × [هـ، و]) = [أ، ب] × [حـ × هـ، ء × و]

= [أ × (حـ × هـ)، ب × (ء × و)]

= [(أ × حـ) × هـ، (ب × ء) × و] خاصية التجميع على الاعداد الصحيحة

=[أ×حـ، ب×ء] × [هـ، و] من تعريف الضرب على الاعداد النسبية

= ([أ، ب] × [حـ، ء]) × [هـ، و]

وهو المطلوب

٥) توزيع عملية الضرب على عملية الجمع في الاعداد النسبية :

[أ، ب] × ([حـ، ء] + [هـ، و]) = [أ، ب] × [حـ، ء] +
[أ، ب] × [هـ، و]

البرهان:

[أ، ب] × ([حـ، ء] + (هـ، و)) = [أ، ب] [حـ×و + ء×هـ، ء×و]

وذلك من تعريف الجمع على الاعداد الصحيحة

= [أ (حـ×و + ء×هـ) ، ب×(ء×و)]

ملاحظة:

اذا كان [أ، ب] عدداً نسبياً فإن

(حـ×أ، حـ×ب) ~ (أ، ب)

مثال (٢، ٥) ~ (٣×٢، ٣×٥) أي ان

(٢، ٥) ~ (٦، ١٥) لان:

٢×١٥ = ٥×٦

لذلك فإن العدد النسبي

[أ×(حـ × و + ء×هـ)، ب × ء×و)]

، [ب×أ (حـ×و + ء×هـ)، ب×ب×(ء×و)]

هما صورتان لنفس العدد النسبي

أي ان

[أ×(حـ×و + ء×هـ)، ب×(ء×و)]

= [ب×أ(حـ×و + ء×هـ)، ب (ء×و)]

= [أ × حـ ، ب × ء] + [أ × هـ ، ب × و]

= ([أ ، ب] × [حـ ، ء]) + ([أ ، ب] × [هـ ، و])

وهو المطلوب

٦) العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب هو [أ ، أ] لان

[أ ، أ] × [س ، ص] = [أ × س ، أ × ص]

= [س ، ص] كذلك

[س ، ص] × [أ × أ] = [س × أ ، ص × أ]

[س . ص] . لأنه حسب الملاحظة التي وضعناها في الخاصية الخامسة لعملية الضرب فإنه اذا ضرب مسقطي العدد النسبي في نفس العدد فإن العدد النسبي لا يتغير : .

٧) اذا كان [أ ، ب] = [أ × ب ، أ × ب]

[أ ، أ] = [ب ، ب]

حيث [أ ، أ] = [ب . ب]

وهو العنصر المحايد في مجموعة الاعداد النسبية .

لذلك نلاحظ ان كل عدد نسبي له نظير ضربي ما عدا العنصر [٠ ، س] اي ما عدا الصفر وذلك لان (س ، ٠) $\not\ni$ ص × ص * أو بمعنى آخر فإن :

[س ، ٠] غير معرفة .

اما العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع على مجموعة الاعداد النسبية فهو الصفر أو [٠ ، أ] وذلك لان

[٠ ، أ] + (حـ ، ء] = [٠ × ء + أ × حـ ، أ ء] .

= [أ حـ ، أ ء]

= [حـ ، ء] .

يوجد نظير جمعي لكل عنصر حيث نظير [أ ، ب] يساوي [— أ ، ب] او [أ ، — ب] وذلك لان .

$[ﺃ، ﺏ] + [-ﺃ، ﺏ] = [ﺃ × ﺏ + ﺏ (-ﺃ)، ﺏ × ﺏ]$.

$= [٠، ﺏ^{٢}] =$ صفر .

سنستعمل الرمز $-[ﺃ، ﺏ]$ ليعنى النظير الجمعي للعدد النسبي $(ﺃ، ﺏ]$.

عملية الطرح على مجموعة الاعداد النسبية .

تعريف:

اذا كان $[ﺃ، ﺏ]$ ، $[ﺣ، ﺩ] \in ﻫ$ فان:

$$[ﺃ، ﺏ] - [ﺣ، ﺩ] = [ﺃ، ﺏ] + \{-[ﺣ، ﺩ]\}$$

$$= [ﺃ، ﺏ] + [-ﺣ، ﺩ] \text{ حيث } -[ﺣ، ﺩ] = [-ﺣ، ﺩ]$$

وهو النظير الجمعي للعدد النسبي $[ﺣ، ﺩ]$

∴ عملية الطرح عملية مغلقة على مجموعة الاعداد النسبية

مثال (١):

$$[١، ٣] - [٢، ٧] = [١، ٣] + [-٢، ٧]$$

$$= [١ × ٧ + ٣(-٢)، ٣ × ٧]$$

$$[٧ - ٦، ٣ × ٧]$$

$$[١، ٢١]$$

مثال (٢)

$$[-٥، -٢] - [-٧، -٤] = [-٥، -٢] + [٧، -٤]$$

$$= [-٥ × (-٤) + (-٢) × ٧، -٢ × (-٤)]$$

$$= [٢٠ - ١٤، ٨]$$

$$= [٦، ٨]$$

عملية القسمة على مجموعة الاعداد النسبية

تعريف:

إذا كان $[ﺃ، ﺏ]$ ، $[ﺣ، ﺩ] \in ﻫ$ حيث $ﺣ \neq$ صفر فإن

[أ، ب] ÷ [ج، د] = [أ، ب] × [د، ج]

مثال:

[٢، ٣] ÷ [٣، ٤] = [٢، ٣] × [٤، ٣]

[٢×٤ ، ٣×٣]

[٨ ، ٩]

قانون الحذف (الاختزال) على مجموعة الاعداد النسبية ن

اذا كان [أ، ب] ، [ج، د] ، [هـ، و] اعداداً نسبية وكان

١) [أ، ب] + [ج، د] = [أ، ب] + [هـ، و] فان

[ج، د] = [هـ، و]

كذلك

٢) اذا كان [أ، ب] × [ج، د] = [أ، ب] × [هـ، و] فإن

[ج، د] = [هـ، و] شرط ان أ ≠ صفر

البرهان:

١) نفرض ان [أ، ب] + [ج، د] = [أ، ب] + [هـ، و]

نضيف النظير الجمعي للعدد [أ، ب] وهو [−أ، ب] للطرفين ينتج ان

[−أ، ب] + ([أ، ب] + [ج، د]) = [−أ، ب] + ([أ، ب]
+ [هـ، و])

([−أ، ب] + [أ، ب]) + [ج، د] = ([−أ، ب] + [أ، ب])
+ [هـ، و]

وذلك حسب خاصية التجميع لعملية الجمع على الاعداد النسبية .

∴ [−أ × ب + ب × أ ، ب × ب] + [ج، د]

= [−أ × ب + ب × أ ، ب × ب] + [هـ، و]

∴ [٠، ب²] + [ج، د] = [٠، ب²] + [هـ، و] حيث [٠، ب²] العنصر

المحايد بالنسبة لعملية الجمع

∴ [٠ × ء + ب^{٢} × حـ ، ب^{٢} × ء] = [٠ × و + ب^{٢} هـ ، ب^{٢} × و]

∴ [ب^{٢} حـ ، ب^{٢} ء] = [ب^{٢} هـ ، ب^{٢} و]

∴ [حـ ، ء] = [هـ ، و] وهو المطلوب .

٢) نفرض ان [أ ، ب] × [حـ ، ء] = [أ ، ب] × [هـ × و]
بضرب الطرفين في النظير الضربي للعدد النسبي [أ ، ب] وهو [ب ، أ] لان
أ ≠ صفر ينتج أن :

[ب ، أ] × ([أ ، ب] × [حـ ، ء])

= [ب ، أ] × ([أ ، ب] × [هـ ، و])

∴ ([ب ، أ] × [أ ، ب]) × [حـ ، ء] = ([ب ، أ] × [أ ، ب]) ×
[هـ ، و] خاصية التجميع

[ب أ ، أ ب] × [حـ ، ء] = [ب أ ، أ ب] × [هـ ، و]

حيث [ب أ ، أ ب] = [أ ، أ] = [ب ، ب]

وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب على الاعداد النسبية

∴ [حـ ، ء] = [هـ ، و] وهو المطلوب

نلاحظ مما سبق ان النظام الرياضي (ن ، + ، ·) حقلاً وذلك لان
(١) (ن ، +) زمره تبديلية اي ان عملية الجمع على ن مغلقة وتبديلية وتجميعية ويوجد عنصر محايد [٠ ، أ]
ولكل عنصر [أ ، ب] نظير جمعي هو [−أ ، ب]
٢) (ن* ، ·) زمرة تبديلية
٣) تتوزع عملية الجمع على عملية الضرب
كما أن النظام (ن ، + ، ·) حلقة بمعنى أن
١) (ن ، +) زمره تبديلية
٢) (ن ، ·) شبه زمره (نصف زمره)
أي ان الضرب عملية مغلقة وتحقق خاصية التجميع على ن

٣) تتوزع عملية الضرب على عملية الجمع

والسؤال الذي ينشأ الآن هو هل هذا النظام مرتب؟

يقال للنظام الرياضي ذو العمليتين (ك، +، ٠) بانه حلقة مرتبة اذا امكن ايجاد مجموعة جزئية من ك، ك، بحيث ان

١) اذا كان أ ∋ ك فإن واحدة فقط من العبارات التالية صحيحة

أ ∋ ك، أو أ = صفر أو —أ ∋ ك،

٢) اذا كان أ، ب ∋ ك، فان

أ + ب ∋ ك، كذلك أ × ب ∋ ك،

والآن هل يمكن ايجاد مثل هذه المجموعة التي تحقق الشرطين السابقين؟

١) لنأخذ ك+ = {أ/ب : أ . ب > صفر }

ولنفرض العدد النسبي ل ∋ ك حيث ل = ح/ى فيكون

ح . ى > صفر أو ح . ى < صفر أو ح . ى = صفر

حيث ح ، ى اعداداً صحيحة ، ى ≠ صفر

فإذا كانت ح . ى > صفر فإن ل > صفر ⇐ ل ∋ ك+

اما اذا كانت ح . ى < صفر فإن ل < صفر ⇐ —ل > صفر ⇐ —ل ∋ ك+

واذا كانت ح . ى = صفر فان ح = صفر لان ى ≠ صفر

∴ ل = صفر = صفر/ى

وبهذا يتحقق الشرط الأول .

٢) الآن نفرض العددين ل = ح/ى ، م = هـ/و حيث ل، م ∋ ك+

∴ ل + م = ح/ى + هـ/و حيث ح . ى > صفر، هـ . و > صفر

= (ح و + ى هـ)/(ى و) ونريد أن نبرهن على ان (ح و + هـ ى)/(ى و)

ينتمي إلى ك+ ولكي نبرهن ذلك يجب ان نثبت ان

(حو + ده) × دو > صفر

أي أن حو × دو + ده × دو > صفر

حدو^{٢} + د^{٢} هو > صفر

لكن ح . د > صفر وبالفرض كذلك و^{٢} > صفر

∴ ح.د^{٢}و > صفر كذلك

هو > صفر وبالفرض د^{٢} > صفر

∴ د^{٢} . هو > صفر

∴ ح . د و^{٢} + د^{٢} هو > صفر

أي أن ل + م ∈ ن$^{+}$

كذلك نريد ان نبرهن على ان

ل . م ∈ ن$^{+}$

ل . م = $\frac{ح}{د}$. $\frac{ه}{و}$ حيث ح . د > صفر كذلك ه . و > صفر

= $\frac{حه}{دو}$ ويجب أن نثبت بأن $\frac{حه}{دو}$ > صفر

وحتى نثبت ذلك يجب أن نثبت بأن

(ح. ه) . (د . و) > صفر

(ح . ه) . (د . و) = (ح . د) . (ه. و)

لكن ح . د > صفر بالفرض كذلك ه .و > صفر

∴ (ح . د) . (ه . و) > صفر

أي أن $\frac{حه}{دو}$ > صفر

بمعنى ان ل . م ∈ ن$^{+}$ وهو المطلوب

والآن (ن، +، .) يشكل حقلاً فهو حقل مرتب؟

ملاحظة:

ن$^{+}$ = { $\frac{أ}{ب}$: أ . ب > صفر } مجموعة الاعداد النسبية الموجبة

ن$^{-}$ = { $\frac{أ}{ب}$: أ . ب } مجموعة الاعداد النسبية السالبة .

وعليه فإن

$$\text{ن} = \text{ن}^{+} \cup \text{ن}^{-} \cup \{٠\} .$$

وكذلك $\frac{-أ}{ب} + \frac{أ}{ب} = ٠$.

لهذا فإن (ن ، +) زمرة

$$\frac{م}{د} + \frac{م'}{د'} = \frac{م'}{د'} + \frac{م}{د}$$

أي أن (ن ، +) زمره تبديلية

وسوف نترك للقارىء أن يثبت أن

(ن^{*} ، ٠) زمره تبديلية مع ملاحظة ان العنصر المحايد الضربي هو :

$\frac{أ}{أ} = ١$ حيث أ $\neq$ صفر

وان النظير الضربي للعدد $\frac{أ}{ب} \in \text{ن}^{*}$ هو $\frac{ب}{أ} \in \text{ن}^{*}$ لان أ ، ب $\neq$ صفر

وكذلك عليه ان يثبت ان عملية الضرب تتوزع على الجمع وبالتالي يكون (ن ، + ، ٠) حقلاً .

وبالاستفادة من عمليتي الجمع والضرب يمكن تعريف عمليتي الطرح والقسمة على النحو التالي :

$$\frac{أ}{ب} - \frac{ح}{ء} = \frac{أ}{ب} + \frac{-ح}{ء}$$

مثلاً

$$\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٣} = \frac{٣}{٤} + \frac{-١}{٣} = \frac{٩ - ٤}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$$

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{ح}{ء} = \frac{أ}{ب} \times \frac{ء}{ح}$$

مثلاً

$$\frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٣} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{١} = \frac{٩}{٤}$$

علاقة الترتيب :

من الظواهر المألوفة في الاعداد الصحيحة هو امكانية كتابتها بالتريب العادي على النحو: ...، —٣ ، —٢ ، —١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

والآن سنحاول تعريف علاقة ترتيب على مجموعة الاعداد النسبية ن .

هي علاقة أصغر من ($<$).

تعريف (٣) : اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ عددين نسبيين فإننا نقول أن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ اذا كان $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} - \frac{\text{أ}}{\text{ب}} >$ صفر

أو بعبارة أخرى اذا وجد عدد نسبي موجب $\frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ بحيث أن

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$$

ونستطيع بهذا التعريف الوصول إلى النتائج التالية : ـ

١) لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} \in \text{ن}$

اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ فإن

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{هـ}}{\text{و}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}} + \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$$

٢) لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} \in \text{ن}$

أ) اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} >$ ٠ .

فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$

ب) اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} < \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} <$ ٠ .

فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}} > \frac{\text{ح}}{\text{ء}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$

مثال ١٠ :

قارن بين $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

لدينا $\frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ٣}{٥ \times ٣} = \frac{٦}{١٥}$

وبما أن ٦ $<$ ٨ اذن $\frac{٢}{٥} < \frac{٦}{١٥}$

ـ وبما أن هناك علاقة ترتيب على ن فإننا نسمي الحقل : **حقل مرتب**

ومن الواضح أنه اذا كان $ع$ ، $ل \in$ ك بحيث أن $ع < ل$ فإن

$ع < \frac{ع + ل}{٢} < ل$ (لماذا ؟)

أي أنه بين أي عددين نسبيين مختلفين يوجد عدد نسبي آخر لهذا فإن المجموعة ك تسمى **مجموعة كثيفة**.

العدد العشري:

الرمز ٠,٥٧ يدل على العدد $\frac{٥٧}{١٠٠}$

كذلك العدد ٣,٢ يدل على العدد $\frac{٣٢}{١٠}$ وهكذا

وبشكل عام نقول ان الرمز

$\pm$ ... $أ_٣ أ_٢ أ_١$ ، و د حيث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ... $\in$ {٠، ١، ٢، ٣، ...، ٩}

د $\in$ ط يسمى عدداً عشرياً وقد يكون العدد العشري مكوناً من عدد منته من المنازل العشرية مثل ٠,٥٧

او عدد غير منتهي من المنازل العشرية مثل ٠,٣٣٣...

حيث النقط الثلاثة تعني أن العدد ٣ يتكرر وعندها نسمي هذا عدداً عشرياً دورياً أو من عدد غير منته من المنازل العشرية غير الدورية.

التمثيل العشري للاعداد النسبية

يمكن ان ننظر إلى العدد النسبي $\frac{٣}{٤}$ على أنه خارج قسمة العدد ٣ على ٤ ، واذا وجدنا ناتج القسمة باستعمال القسمة الطويلة نجد ان $\frac{٣}{٤} =$ ٠,٧٥ ويسمى العدد ٠,٧٥ التمثيل العشري للعدد النسبي $\frac{٣}{٤}$ ، وبالمثل العدد العشري ٠,٤ يمثل العدد النسبي $\frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$ واذا أخذنا العدد النسبي $\frac{١}{٣}$ نجد ان تمثيله العشري ٠,٣٣٣... حيث أن النقط الثلاثة... تعني ان الرقم ٣ يتكرر، لهذا فإننا نكتبه على الصورة $٠,\overline{٣}$ والاشاره — فوق الرمز ٣ يدل على ان الرقم ٣ دوري (يتكرر) ويسمى العدد $٠,\overline{٣}$ عدداً عشرياً دورياً

والسؤال الذي ينشأ الآن هو هل كل عدد عشري يمثل عدداً نسبياً ؟
والجواب على هذا السؤال نجده في الفرضية التالية .

فرضية: كل عدد نسبي $\frac{ذ}{ى}$ يمكن التعبير عنه اما بعدد منته من المنازل العشرية او بعدد غير منته من المنازل العشرية المتكررة (الدورية) وبالعكس كل عدد عشري ذي منازل عشرية منتهية أو ذي منازل عشرية دورية يمكن كتابته بشكل عدد نسبي .

وهنالك سؤال آخر هو ماذا يسمى العدد العشري ذو المنازل العشرية غير المنتهية وغير الدوري ، تسمى هذه الاعداد غير النسبية وهذا ما سنتعرض له في البند التالي :

[١ - ٤] مجموعة الاعداد الحقيقية

لقد أشرنا في البند السابق إلى وجود أعداد عشرية لا نهائية وغير دورية وقلنا أن هذه الاعداد لا يمكن التعبير عنها باعداد نسبية . ان مثل هذه الاعداد ظهرت نتيجة لتساؤلات عملية مثل ايجاد طول قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي وحدة قياس واحدة ، فأدىٰ هذا التساؤل إلى محاولة حل المعادلة التربيعية $س^٢ = ٢$ وهنالك تساؤلات أخرى تماثل التساؤل السابق مثل ما طول أحد ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية الذي طول وتره ٢ وطول ضلعه ١ مما أدى إلى محاولة حل المعادلة $ص^٢ = ٣$ فإذا فرضنا أن حل المعادلة الأولى هو $س = \sqrt{٢}$ والثانية $ص = \sqrt{٣}$ فإنه يتعذر علينا ايجاد مثل هذه الحلول في مجموعة الاعداد النسبية ن

والمثال التالي يؤكد أنه لا يوجد عدد نسبي يحقق المعادلة $س^٢ = ٢$

مثال١١ : العدد $\sqrt{٢}$ ليس عدداً نسبياً

البرهان: لنفرض أن $\sqrt{٢}$ هو العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ حيث القاسم المشترك الأعظم للعددين أ ، ب يساوي ١

$\therefore (\frac{أ}{ب})^٢ = ٢ = \frac{٢}{١}$

$أ^٢ = ٢ب^٢$

$\therefore أ^٢$ يقبل القسمة على ٢

∴ $ا$ يقبل القسمة على ٢ لماذا ؟

∴ يوجد عدد طبيعي $د$ بحيث أن $ا = ٢د$ ومنها $ا^٢ = ٤د^٢$

لكن $ا^٢ = ٢ب^٢$ ∴ $٢ب^٢ = ٤د^٢$

∴ $ب^٢ = ٢د^٢$

∴ $ب^٢$ يقبل القسمة على ٢

∴ $ب$ يقبل القسمة على ٢

من هنا نلاحظ أن كلا من $ا$ ، $ب$ يقبل القسمة على ٢

القاسم المشترك الاعظم للعددين $ا$ ، $ب ≠ ١$ لماذا ؟

وهذا يناقض الفرض ∴ الفرض خطأ

أي ان $\sqrt{٢}$ ليس عدداً نسبياً

وبنفس هذا الاسلوب يمكن اثبات ان $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$ اعداد غير نسبية ، وهذه الجذور تسمى أحياناً جذور صماء وفيما يلي خصائص الجذور الصماء .

إذا كانت $ا$ ، $ب ∈$ ط* فإن :

١) $\sqrt{ا} \cdot \sqrt{ب} = \sqrt{اب}$ مثلاً $\sqrt{١٠} = \sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ × ٢} = \sqrt{٢٥} × \sqrt{٢}$.

∴ $\sqrt{٥} × \sqrt{١٠} = ٥\sqrt{٢}$.

٢) $\frac{\sqrt{ا}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ا}{ب}}$

مثلاً $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{١٠}} = \sqrt{\frac{٥}{١٠}} = \sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) $\sqrt{ا + ب} ≠ \sqrt{ا} + \sqrt{ب}$.

مثلاً $\sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$.

في حين أن $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦} = ٣ + ٤ = ٧$.

والآن سنرمز لمجموعة الاعداد غير النسبية بالرمز $\bar{ن}$ وهي مجموعة الاعداد التي يمكن تمثيلها باعداد عشرية غير منتهية وغير دورية أمثال الجذور

الصماء مثل $\sqrt{٢}$ والنسبة التقريبية ط والعدد النايبيري هـ وغيرها .

ومن هنا نلاحظ أنه قد أصبح لدينا مجموعتان من الاعداد هما مجموعة الاعداد النسبية ن ومجموعة الاعداد غير النسبية $\bar{ن}$ ومن هنا يمكننا أن نعرف مجموعة الأعداد الحقيقية على النحو:

$$ح = ن \cup \bar{ن}$$

وسوف نفرض وجود عمليتي جمع وضرب على مجموعة الاعداد الحقيقية ح هما عمليتا الجمع والضرب العادية كما سنفرض أن النظام (ح ، + ، ×) حقل مرتب

وسوف نفرض ان علاقة الترتيب على حقل الاعداد الحقيقية تحقق قوانين الحذف التالية:

١) اذا كان أ ، ب ، حـ $\in$ ح بحيث ان أ $>$ ب فإن أ + حـ $>$ ب + حـ

٢) اذا كان أ ، ب ، حـ $\in$ ح بحيث ان أ $>$ ب ، حـ $\in$ ح$^+$ فإن أحـ $>$ ب حـ

٣) اذا كان أ ،ب ، حـ $\in$ ح بحيث أن أ $>$ ب ، حـ $\in$ $\bar{ح}$ فإن أحـ $<$ بحـ

فمثلا اذا كانت ٣ $>$ ٥ فإن ٣ + ٢ $>$ ٥ + ٢ ،

٣ — ٢ $>$ ٥ — ٢

٣ × ٢ $>$ ٥ × ٢ ولكن ٣ × (—٢) $<$ ٥ × (—٢)

وهناك فروض أخرى سنضيفها على ح ومن هذه الفروض:

أولاً:

إذا كان ن عدداً طبيعياً، أ $\in$ ح$^+$ ، (ح$^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة)

فإنه يوجد عنصر وحيد س $\in$ ح$^+$ يحقق المعادلة س^{ن} = أ ويسمى هذا العدد س الجذر النوني للعدد أ ويكتب على الشكل $\sqrt[ن]{أ}$

وفيما يلي بعض خواص الجذور النونية وهي :

١) $\sqrt[د]{أب} = \sqrt[د]{أ} \times \sqrt[د]{ب}$

٢) $\sqrt[د]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[د]{أ}}{\sqrt[د]{ب}}$ حيث ب $\neq$ ٠ .

وهاتان الخاصيتان تتحققان في إحدى الحالتين التاليتين

أ) د عدد طبيعي فردي ، أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح

ب) د عدد طبيعي زوجي ، أ $\in$ ح$^+$ ، ب $\in$ ح$^+$

ثانياً :

إذا كان س عدداً حقيقياً ، فإنه يوجد عدد وحيد صحيح د بحيث أن د $\leqslant$ س $<$ د + ١ .

ويسمى العدد العشري د تقريباً أدنى للعدد الحقيقي لأقرب عدد صحيح فمثلاً ٣ $\leqslant$ ٣ $<$ ٤ ، ١ $\leqslant$ $\sqrt{٣}$ $<$ ٢ ، ٢ $\leqslant$ $\sqrt[٣]{١٧}$ $<$ ٣ والنظرية التالية هي نتيجة مباشرة لهذه الفرضية .

نظرية (٢) :

إذا كان س $\in$ ح ، د $\in$ ط فإنه يوجد عدد وحيد ك $\in$ ص بحيث أن :

$$\frac{ك}{١٠^{د}} \leqslant س < \frac{ك + ١}{١٠^{د}}$$

ويسمى العدد العشري ك × ١٠$^{-د}$ = $\frac{ك}{١٠^{د}}$ تقريباً أدنى للعدد الحقيقي س وذلك لأقرب ١٠$^{-د}$ (أي إلى د من المنازل العشرية) .

مثال (١٢) :

إذا كانت س = $\sqrt{٢}$ فإن ١ $<$ $\sqrt{٢}$ $<$ ٢ لهذا فإن التقريب الأدنى لـ $\sqrt{٢}$ لأقرب عدد صحيح هو ١، وكذلك ١٤^٢ $\leqslant$ ٢٠٠ $<$ ١٥^٢ إذن ١٤ $\leqslant$ ١٠$\sqrt{٢}$ $<$ ١٥ ومن ثم فإن ١,٤ $\leqslant$ $\sqrt{٢}$ $<$ ١,٥ لهذا فإن التقريب الأدنى لـ $\sqrt{٢}$ لأقرب منزلة عشرية هو ١,٤ وكذلك

$(١٤١)^٢ \leqslant ٢٠٠٠٠ < ١٤٢^٢$

إذن $١٤١^٢ \leqslant ١٠٠ \sqrt{٢} < ١٤٢$

ومن ثم فإن $١,٤١ < \sqrt{٢} < ١,٤٢$

لهذا فإن التقريب الأدنى لـ $\sqrt{٢}$ لأقرب منزلتين عشريتين هو ١,٤١ .

وإذا كان (ر) عدداً حقيقياً، وطبقنا عملية التقريب حسب النظرية السابقة عدداً منتهياً أو لا منتهياً من المرات فإننا نحصل على مثل العدد ر وهو عدد عشري لا نهائي في الصورة

$\pm ... أ_د ... أ_٣ أ_٢ أ_١$ و أ.

حيث أ، د $\in$ ط، $أ_د \in$ ط، $٠ \leqslant أ_د \leqslant ٩$

وبناء على ذلك نتوصل إلى النتيجة العامة: كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بعدد عشري نهائي أو لا نهائي .

الحد الأعلى والحد الأدنى لمجموعة:

إذا كان ف $\subseteq$ ل وكانت أ $\in$ ل فإن:

١) أ تسمى حداً أعلى للمجموعة ف إذا كان أ $>$ م لكل م $\in$ ف ويكون أ أصغر حد أعلى للمجموعة ف إذا كان أ حداً أعلى وأصغر من أو يساوي أي حد أعلى مثل أَ

وتكون المجموعة محدودة من أعلى إذا وجد لها حد أعلى .

مثال (١)

ط* = {١، ٢، ...} لا يوجد حد أعلى لها وبالتالي فلا يوجد أصغر حد أعلى فهي ليست محدود من أعلى علماً بأن ط $\subset$ ح .

مثال (٢)

إذا كانت ف = {١، ٢، ٣، ٤} حيث ف $\subset$ ن حيث ن مجموعة الأعداد النسبية، فإن لها حدوداً عليا كثيرة مثل

$٤، ٤\frac{١}{٢}، ٥، ٥\frac{١}{٢}، ....$

وهنا العدد ٤ هو أصغر حد أعلى .

فمثلاً ٤ تنتمي للمجموعة ولكن $٤\frac{١}{٢}$ ، ٥ ، $٥\frac{١}{٢}$ ، . . . لا تنتمي للمجموعة **ف** .

مثال (٣)

إذا كانت **ل** = { . . . ، —٤ ، —٣ ، —٢ ، —١ } حيث **ل** $\subset$ ح حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية .

فإنه يوجد حدود عليا كثيرة للمجموعة **ل** مثل —١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . وأصغر الحدود العليا هو العدد —١ .

٢) يقال عن م بأنه حد أدنى للمجموعة **ف** إذا كان :

م $<$ م لكل م $\in$ ف

ويقال عن م بأنه أكبر حد أدنى للمجموعة **ف** إذا كانت م أكبر من أو يساوي أية حد أدنى للمجموعة **ف** أي م $\geqslant$ مَ

وتكون المجموعة محدودة من أسفل إذا وجد لها حد أدنى .

مثال :

إذا كان **ل** = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ١٠ } حيث **ل** $\subset$ ص فإنه يوجد حدود دنيا كثيرة لهذه المجموعة **ل** مثل ١ ، ٠ ، —١ ، . . . ولكن أكبر هذه الحدود هو العدد ١ فهو أكبر حد أدنى ، كذلك يوجد حدود عليا كثيرة مثل ١٠ ، ١١ ، . . . ولكن أصغر هذه الحدود هو ١٠ فهو أصغر حد أعلى .

وعليه فإن المجموعة **ل** محدودة من أعلى ومن أسفل . وتكون المجموعة محدودة إذا وجد لها حد أدنى وحد أعلى .

الترتيب على مجوعة الأعداد الحقيقية :

إن حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) حقل مرتب لأنه يمكن إيجاد مجموعة جزئية مثل ح+ بحيث يتحقق الشرطان التاليان :

١) إذا كان م $\in$ ح فإنه

إما أن تكون م $\in$ ح+ أو —م $\in$ ح+ أو م = صفر .

٢) إذا كان $ا$ ، $ب$ $\in$ $ح^+$ فإنه

$ا+ب \in ح^+$ كذلك $ا \times ب \in ح^+$ حيث $ح^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

خاصية الاكتمال على مجموعة الأعداد الحقيقية :

تعريف :

نقول عن الحقل المرتب (ل ، + ، $\times$) بأنه حقل مكتمل إذا كان لكل مجموعة جزئية ف من ل ومحدودة من أعلى يوجد أصغر حد أعلى لها في ف

من الواضح أن الحقل المرتب للأعداد الحقيقية ينطبق عليه التعريف أي أنه

(ح ، + ، $\times$) حقل مرتب مكتمل :

حيث أنه لأية مجموعة جزئية من ح محدودة يوجد أصغر حد أعلى لها . وخاصية الاكتمال على مجموعة الأعداد الحقيقية أفادت في جعل حقل الأعداد الحقيقية حقل متصل . وجعلت خط الأعداد الحقيقية خالياً من الفجوات .

كما أنها أدت إلى وجود اقتران تناظر بين مجموعة الأعداد الحقيقية ونقط خط الأعداد .

الفترات :

هناك نوع خاص من المجموعات الجزئية من ح تسمى الفترات وهي ثلاثة أصناف

١) الفترة المغلقة [ا ، ب] وتعرف على النحو التالي

[ا ، ب] = {س : س عدد حقيقي ، ا $\leqslant$ س $\leqslant$ ب}

٢) الفترة المفتوحة] ا ، ب [وتعرف على النحو التالي

] ا ، ب [= {س : س عدد حقيقي ، ا $<$ س $<$ ب}

٣) الفترة نصف المفتوحة ، وقد تكون مفتوحة من أسفل ومغلقة من أعلى مثل] ا ، ب] = {س : س عدد حقيقي ، ا $<$ س $\leqslant$ ب}

أو قد تكون مفتوحة من أعلى ومغلقة من أسفل مثل

[أ، ب[= {س: س عدد حقيقي ، أ ≤ س < ب}

ومن الجدير بالملاحظة هنا أن ب، أ ∈ [أ، ب] ولكن أ ∉]أ، ب] وكذلك ب، أ ∉]أ، ب[. وبشكل عام تكون هذه الفترات محدودة إذا كانت أ، ب ∈ ح . وأصغر حد أعلى للفترة [أ، ب[هو ب في حين أن ب ∉ [أ، ب[وأكبر حد أدنى للفترة]أ، ب] هو أ في حين أن أ ∉]أ، ب]

[١-٥] مجموعة الأعداد المركبة

إذا كانت لدينا مجموعة المعادلات التالية:

١) $س^2 - س + ٣ = $ صفر

٢) $س^2 \quad = -٢$

٣) $س^2 + ٢س - ١ = $ صفر

فهل يوجد حل لهذه المعادلات في مجموعة الأعداد الحقيقية ح. والجواب بالطبع لا . لذلك كانت الحاجة لايجاد مجموعة أعداد جديدة تحقق المعادلات المذكورة وهذا ما جعل علماء الرياضيات أمثال جاوس وآرجاند والعالم ويسل يبحثون عن مثل هذه المجموعة الجديدة التي تسمى مجموعة الأعداد المركبة

تكوين الأعداد المركبة كامتداد للأعداد الحقيقية:

لتكن ح مجموعة الأعداد الحقيقية وليكن ح × ح الضرب الديكارتي لهذه المجموعة في نفسها أي

$$ح \times ح = \{ (أ ، ب) : أ ، ب \in ح \}$$

ولتكن العلاقة (=) المساواة معرفة على ح × ح بالشكل التالي

(أ ، ب) = (حـ ، ى) إذا وفقط إذا كان

أ = حـ ، ب = ى .

الآن لو دققنا في هذه العلاقة للاحظنا أنها علاقة تكافؤ لأنها

١) **علاقة انعكاس حيث** (أ ، ب) = (أ ، ب) لكل أ ، ب ∈ ح

٢) علاقة تماثل لأنه إذا كان (أ ، ب) = (حـ ، ى) فإنه (حـ ، ى) = (أ ، ب)

٣) علاقة تعدي لأنه إذا كان (أ ، ب) = (حـ ، ى) ، (حـ ، ى) = (هـ و)

فإن (أ ، ب) = (هـ ، و) والسبب في ذلك هو

$(ﺃ ، ﺏ) = (ﺣ ، ﺀ) \Leftarrow ﺃ = ﺣ ، ﺏ = ﺀ$

$(ﺣ ، ﺀ) = (ﻫ ، ﻭ) \Leftarrow ﺣ = ﻫ ، ﺀ = ﻭ$

$\therefore ﺃ = ﻫ ، ﺀ = ﻭ$

$\therefore (ﺃ ، ﺏ) = (ﻫ ، ﻭ)$.

وبما أن العلاقة تكافؤ فهي تجزىء المجموعة الكلية $ح \times ح$ إلى صفوف تكافؤ كل صف يتكون من عنصر واحد فقط فمثلا صف التكافو (ﺃ ،ﺏ) يمثل العنصر (ﺃ ،ﺏ) فقط، تعرف مجموعة الأعداد المركبة

$م = \{ (س ، ص) : س ، ص \in ح \}$

ويسمى الزوج المرتب (ﺃ ،ﺏ) عدداً مركباً ع وقد درجت العادة على كتابة العدد ع = (ﺃ ، ﺏ) على الصورة

$ع = ﺃ + ﺏ ت$ حيث ﺃ ،ﺏ $\in ح$، $ت = \sqrt{-1}$

وأحيانا يرمز لهذا العدد بالزوج المرتب (ﺃ ،ﺏ).

ويسمى ﺃ بالجزء الحقيقي للعدد المركب بينما يسمى ﺏ بالجزء التخيلي للعدد المركب.

عملية الجمع على الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان (ﺃ ، ﺏ)، (ﺣ ، ﺀ) عددين مركبين فإن

$(ﺃ ، ﺏ) + (ﺣ ، ﺀ) = (ﺃ + ﺣ ، ﺏ + ﺀ)$.

خواص عملية الجمع على الأعداد المركبة:

١) عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة مغلقة لأنه إذا كان (ﺃ . ﺏ)، (ﺣ ، ﺀ) $\in$ م حيث م مجموعة الأعداد المركبة فإن $[(ﺃ . ﺏ) + (ﺣ ، ﺀ)] \in$ م أيضاً.

٢) عملية الجمع تبديلية حيث:

$(ﺃ ، ﺏ) + (ﺣ ، ﺀ) = (ﺣ ، ﺀ) + (ﺃ ، ﺏ)$

البرهان:

(أ، ب) + (ح، ى) = (أ+ح، ب+ى) = (ح+أ، ى+ب)

= (ح، ى) + (أ، ب).

٣) عملية الجمع تجميعية حيث أن

[(أ، ب) + (ح، ى)] + (هـ، و) (أ، ب) + [(ح، ى) + (هـ، و)]

البرهان:

[(أ+ب) + (ح، ى)] + (هـ، و) = (أ+ح، ب+ى) + (هـ، و)

= (أ+ ح+هـ، ب+ى+و) = [(أ) + (ح+هـ)، ب + (ى+هـ)]

= (أ، ب) + [(ح، ى) + (هـ، و)]

٤) العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع هو (٠،٠)

وذلك لأن (أ، ب) + (٠، ٠) = (٠، ٠) + (أ، ب) = (أ، ب).

٥) النظير الجمعي للعدد المركب (–أ، –ب) + (أ، ب) = (٠، ٠).

عملية الضرب على مجوعة الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان (أ، ب)، (ح، ى) عددان مركبان فإن

(أ، ب) × (ح، ى) = (أ ح – ب ى، أ ى + ب ح)

حيث (أ ح – ب ى) ∈ ح، (أ ى + ب ح) ∈ ح

مثال:

ليكن $ع_1$ = (أ، ب) = (٢، ٥)

$ع_2$ = (ح، ى) = (٣، ٤)

فإن $ع_1 \times ع_2$ = (أ، ب) × (ح، ى) = (أ ح – ب ى، أ ى + ب ح)

= (٢ × ٣ – ٥ × ٤، ٢ × ٤ + ٥ × ٣) = (٦ – ٢٠، ٨ + ١٥)

= (–١٤، ٢٣)

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

١) عملية الضرب مغلقة على مجموعة الأعداد المركبة:

(أ ، ب) × (حـ ، ء) = (أ حـ − ب ء ، أ ء + ب حـ) ∈ ع .

لأن أ ، حـ ، ب ء ∈ ع ⇐ (أ حـ − ب ء) ∈ ع

كذلك أ ء ، ب حـ ∈ ع ⇐ (أ ء + ب حـ) ∈ ع .

٢) عملية الضرب تبديلية على مجموعة الأعداد المركبة:

(أ ، ب) × (حـ ، ء) = (أ حـ − ب ء ، أ ء + ب حـ) = (حـ ، ء) × (أ ، ب) .

البرهان:

(أ ، ب) × (حـ ، ء) = (أ حـ − ب ء ، أ ء + ب حـ)

= (حـ أ − ء ب ، ء أ + حـ ب) (حـ ، ء) × (أ ، ب)

٣) عملية الضرب تجميعية على مجموعة الأعداد المركبة:

[(أ ، ب) × (حـ ، ء)] × (هـ ، و) = (أ ، ب) × [(حـ ، ء) × (هـ ، و)] .

البرهان:

[(أ ، ب) × (حـ ، ء)] × (هـ ، و) = (أ حـ − ب ء ، أ ء + ب حـ) × (هـ ، و)

= ((أ حـ − ب ء) هـ − (أ ء + ب حـ) و ، (أ حـ − ب ء) و + (أ ء + ب حـ) هـ) .

= (أ حـ هـ − ب ء هـ − أ ء و − ب حـ و ، أ حـ و − ب ء و + أ ء هـ + ب حـ هـ]

=[(أ حـ ء − أ ء و) − (ب ء هـ + ب حـ و) ، (أ حـ و + أ ء هـ) − (ب ء و − ب حـ ء)]

= [أ (حـ − ء و) − ب (ء هـ + حـ و)، أ (حـ و + ء هـ) +
ب (حـ − ء و)]

= (أ، ب) × [حـ − ء و، حـ و + ء هـ] = (أ، ب) × [(حـ، ء) ×
× (هـ، و)]

وهو المطلوب

٤) العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب هو (١، ٠)
لأن
(أ، ب) × (١، ٠) = (١، ٠) × (أ، ب) = (أ، ب)

٥) تتوزع عملية الضرب على عملية الجمع.
ونترك برهان ذلك كتمرين للطالب.

٦) إذا كان (أ، ب) عنصراً مركباً بحيث أن أ ≠ صفر، ب ≠ صفر فإن النظير الضربي له هو

$\frac{\text{أ}}{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}$ ، $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}$ ولإثبات ذلك نتبع ما يلي:

البرهان:

نفرض أن (أ، ب) عدد مركب ونفرض أن (حـ، ء) نظيره الضربي
∴ (أ، ب) × (حـ، ء) = (أ حـ − ب ء، أ ء + ب حـ) = (١، ٠)
حيث (١، ٠) العنصر المحايد

∴ أ حـ − ب ء = ١ ..... (١)
أ ء + ب حـ = ٠ ...... (٢)

بضرب المعادلة الأولى في ب والثانية في − أ ينتج أن

$$\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} - \text{ب}^2\,\text{د} = \text{ب}$$

$$-\text{أ}^2\,\text{د} - \text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} = \text{صفر} \qquad \text{بالجمع}$$

$$-\text{ب}^2\,\text{د} - \text{أ}^2\,\text{د} = \text{ب} \qquad \text{بالضرب في } -1$$

$$\text{ب}^2\,\text{د} + \text{أ}^2\,\text{د} = -\text{ب}$$

$$\Leftarrow \text{د}\,(\text{ب}^2 + \text{أ}^2) = -\text{ب}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$$

والآن نضرب المعادلة رقم (١) في أ ورقم (٢) في ب ينتج:

$$\text{أ}^2\,\text{جـ} - \text{أ}\,\text{ب}\,\text{د} = \text{أ}$$

$$\text{أ}\,\text{ب}\,\text{د} + \text{ب}^2\,\text{جـ} = \text{صفر} \quad \text{بالجمع}$$

$$\text{أ}^2\,\text{جـ} + \text{ب}^2\,\text{جـ} = \text{أ}$$

$$\text{جـ}\,(\text{أ}^2 + \text{ب}^2) = \text{أ}$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{\text{أ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$$

أي أن العنصر النظير هو $\left(\frac{\text{أ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} \,،\, \frac{-\text{ب}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\right)$

هذا وإذا كان $\text{ع} = (\text{أ} \,،\, \text{ب})$ عددا مركبا فإننا نرمز إلى نظيره الجمعي بالرمز $-\text{ع} = (-\text{أ} \,،\, -\text{ب})$ ونرمز إلى نظيره الضربي بالرمز $\text{ع}^{-1} = (\text{أ} \,.\, \text{ب})^{-1}$ واحيانا يكتب النظير الضربي بالشكل $\frac{1}{\text{ع}}$.

عملية الطرح والقسمة على مجموعة الأعداد المركبة:

اذا كان $\text{ع}_1 = (\text{أ} \,.\, \text{ب})$ عدداً مركباً كذلك $\text{ع}_2 = (\text{جـ} \,،\, \text{د})$ عدداً مركباً فإن:

١) $ع_١ - ع_٢ = ع_١ + (-ع_٢)$

أي

$(أ، ب) - (حـ، ء) = (أ، ب) + (-حـ، -ء) = (أ - حـ، ب - ء)$

أي أننا نضيف النظير الجمعي للمطروح.

٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = ع_١ \times ع_٢^{-١}$ شريطة ان يكون $ع_٢ \neq (٠، ٠)$

أي أن $\frac{(أ، ب)}{(حـ، ء)} = (أ، ب) \times (حـ، ء)^{-١}$ اي أننا نضرب في النظير الضربي للمقسوم عليه.

مثال:

إذا كان $ع_١ = (٣، -١)$، $ع_٢ = (١، ٢)$ فجد

١) $ع_١ + ع_٢$ ٢) $ع_١ - ع_٢$ ٣) $ع_١ \times ع_٢$

٤) $\frac{ع_١}{ع_٢}$

الحل:

١) $ع_١ + ع_٢ = (٣، -١) + (١، ٢) = (٣ + ١، -١ + ٢) = (٤، ١)$

٢) $ع_١ - ع_٢ = ع_١ + (-ع_٢) = (٣، -١) + (-١، -٢)$

$= (٣ + (-١)، -١ + (-٢)) = (٢، -٣)$

٣) $ع_١ \times ع_٢ = (٣، -١) \times (١، ٢) = (٣ \times ١ - (-١) \times ٢، ٣ \times ٢ + (-١) \times ١)$

$= (٣ + ٢، ٦ - ١) = (٥، ٥)$.

٤) $\frac{ع_١}{ع_٢} = ع_١ \times ع_٢^{-١}$

$$\text{ع}_{٢} = (١ ، ٢) \Leftarrow \text{ع}_{٢}^{-١} = \left(\frac{١}{١^{٢}+٢^{٢}} ، \frac{-٢}{١^{٢}+٢^{٢}}\right) = \left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \text{ع}_{١} \times \text{ع}_{٢}^{-١} = (٣ ، -١) \times \left(\frac{١}{٥} ، -\frac{٢}{٥}\right)$$

$$= \left(٣ \times \frac{١}{٥} - (-١) \times \frac{-٢}{٥} ، ٣ \times \frac{-٢}{٥} + (-١) \times \frac{١}{٥}\right)$$

$$= \left(\frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} ، \frac{-٦}{٥} - \frac{١}{٥}\right)$$

$$= \left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٧}{٥}\right).$$

العدد التخيلي البحت:

يقال للعدد المركب الذي على الصورة $٠ + \text{ب}\text{ت}$ بالعدد التخيلي البحت.

هذا ويمكن كتابته بالصورة $(٠ ، \text{ب})$.

وعليه فإن مجموعة الأعداد التخيلية البحتة $= \{(٠ ، \text{ب}) : \text{ب} \in \text{ح}\}$

نظرية:

مربع أي عدد تخيلي بحت يساوي عدداً حقيقياً سالباً.

البرهان:

لنفرض العدد $\text{ع} = (٠ ، \text{ب})$

$$\therefore \text{ع}^{٢} = (٠ ، \text{ب})^{٢} = (٠ ، \text{ب}) \times (٠ ، \text{ب})$$

$$= (٠ \times ٠ - \text{ب} \times \text{ب} ، ٠ \times \text{ب} + \text{ب} \times ٠)$$

$$= (-\text{ب}^{٢} ، ٠) = -\text{ب}^{٢} + ٠ \,\text{ت} = -\text{ب}^{٢}$$

وبما أن ب عدد حقيقي $\Leftarrow \text{ب}^{٢}$ عدد حقيقي موجب.

$\therefore -\text{ب}^{٢}$ عدد حقيقي سالب وهو المطلوب.

مرافق العدد المركب:

تعريف:

إذا كان ع عدداً مركباً بحيث $ع = أ + ب ت$ فإن

$\bar{ع} = أ - ب ت$ يسمى مرافق العدد المركب ع .

أو بصورة أخرى:

إذا كان $ع = (أ ، ب)$ عددا مركبا فإن $\bar{ع} = (أ ، -ب)$ مرافق العدد المركب.

هذا ويجب ملاحظة أن $\bar{ع}$ هي انعكاس للنقطة التي تمثل العدد المركب ع في محور الانعكاس (محور السينات) وسنوضح ذلك عندما نأتي إلى التمثيل البياني للأعداد المركبة.

خواص المرافق:

١) حاصل جمع أي عدد مركب مع مرافقه يعطي مثلي الجزء الحقيقي له.

فمثلاً إذا كان $ع = أ + ب ت$ فإن $\bar{ع} = أ - ب ت$ وعليه فإن

$ع + \bar{ع} = (أ + ب ت) + (أ - ب ت) = (أ + أ ، ب ت - ب ت)$

$= (٢أ ، ٠)$

٢) إذا كان $ع_١ ، ع_٢$ عددان مركبان فإن

$\overline{ع_١ \pm ع_٢} = \bar{ع}_١ \pm \bar{ع}_٢$.

البرهان:

$ع_١ = أ + ب ت \qquad ع_٢ = حـ + د ت$

$\therefore ع_١ + ع_٢ = (أ \pm ب ت) + (حـ \pm د ت) = (أ + حـ) + (ب + د) ت$

$\therefore \overline{ع_١ \pm ع_٢} = (أ + حـ) - (ب + د) ت = أ + حـ - ب ت - د ت$

$= (أ - ب ت) + (حـ - د ت) = \bar{ع}_١ \pm \bar{ع}_٢$

٣) $\overline{ع_١ \times ع_٢} = \bar{ع}_١ \times \bar{ع}_٢$

البرهان:

$$\text{ع}_1 \times \text{ع}_2 = (\text{أ}، \text{ب}) \times (\text{حـ}، \text{د}) = (\text{أحـ} - \text{ب د}، \text{أد} + \text{ب حـ})$$

$$= (\text{أحـ} - \text{ب د}) + (\text{أد} + \text{ب حـ})\,\text{ت}$$

$$\therefore\ \overline{\text{ع}_1 \times \text{ع}_2} = (\text{أحـ} - \text{ب د}) - (\text{أد} + \text{ب حـ})\,\text{ت}$$

$$= \text{أحـ} - \text{ب د} - \text{أد ت} - \text{ب حـ ت}$$

$$= \text{أحـ} - \text{ب حـ ت} - (\text{ب د} + \text{أد ت})$$

$$= (\text{أ} - \text{ب ت})\,\text{حـ} - (\text{ب} + \text{أ ت})\,\text{د}$$

$$= (\text{أ} - \text{ب ت}) \times (\text{حـ} - \text{د ت})$$

$$= (\text{أ}، -\text{ب})(\text{حـ}، -\text{د}) = \overline{\text{ع}}_1 \times \overline{\text{ع}}_2$$

٤) $\overline{\left(\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right)} = \dfrac{\overline{\text{ع}}_1}{\overline{\text{ع}}_2}$

البرهان:

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \text{ع}_1 \times \text{ع}_2^{-1} = (\text{أ}، \text{ب}) \times (\text{حـ}، \text{د})^{-1}$$

$$= (\text{أ}، \text{ب}) \times \left(\frac{\text{حـ}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2}، \frac{-\text{د}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{أحـ}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2} + \frac{\text{ب د}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2}، \frac{-\text{أد}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2} - \frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \left(\frac{\text{أحـ} + \text{ب د}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2} + \frac{-\text{أد} + \text{ب حـ}}{\text{حـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)} = \left(\frac{\text{أ جـ} + \text{ب د}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} \quad ، \quad \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

لكن $\frac{\bar{ع}_1}{\bar{ع}_2} = (\text{أ} ، -\text{ب}) \times (\bar{ع}_2)^{-1}$

$$= (\text{أ} ، -\text{ب}) \times (\text{جـ} ، -\text{د})^{-1} = (\text{أ} ، -\text{ب}) \times \left(\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} ، \frac{\text{د}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} + \frac{\text{ب د}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} \quad ، \quad \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{أ جـ} + \text{ب د}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} \quad ، \quad \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2}\right)$$

$\therefore \frac{\bar{ع}_1}{\bar{ع}_2} = \overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)}$ وهو المطلوب.

٥) مرافق المرافق لعدد مركب = العدد المركب نفسه أي أنه إذا كان ع عدداً مركباً فإن:

$$\bar{\bar{ع}} = ع$$

البرهان:

$ع = (\text{أ} ، \text{ب})$

$\therefore \bar{ع} = (\text{أ} ، -\text{ب}) \Leftarrow \bar{\bar{ع}} = (\text{أ} ، \text{ب})$

أي أن $ع = \bar{\bar{ع}}$ وهو المطلوب

القيمة المطلقة للعدد المركب (مقياس العدد المركب)

إذا كان $ع = أ + ب ت$ فإن

$|ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2}$ وهذه القيمة تمثل طول المتجه الذي يمثل العدد المركب ع حيث أن المتجه يمثل بالزوج المرتب (أ ، ب).

مثال:

إذا كانت $ع = ٢ + ٣ت$ فإن مقياس ع $= |ع|$

حيث $|ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2} = \sqrt{٢^2 + ٣^2} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

ملاحظة:

إذا كان $ع = (أ ، ب)$ فإن $\bar{ع} = (أ ، -ب)$

$\therefore ع \times \bar{ع} = (أ ، ب) \times (أ ، -ب)$.

$= (أ \times أ - ب \; (-ب) ، - أ ب + ب أ)$

$= (أ^2 + ب^2 ، ٠)$

$= (أ^2 + ب^2) + ٠ \; ت$

$= أ^2 + ب^2$.

لكن $|ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

$\therefore |ع|^2 = أ^2 + ب^2$ بمعنى أن

$ع \times \bar{ع} = |ع|^2 = أ^2 + ب^2$ أي أن

حاصل ضرب العدد المركب ع في مرافقة يعطي مربع المقياس للعدد المركب ع.

خواص القيمة المطلقة للأعداد المركبة (المقياس):

١) $|ع| = |\bar{ع}|$ حيث ع عدد مركب

البرهان:

$ع = (أ ، ب) \Leftarrow |ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

$\bar{ع} = (أ ، -ب) \Leftarrow |\bar{ع}| = \sqrt{أ^2 + (-ب)^2} = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

$\therefore |ع| = |\bar{ع}|$ وهو المطلوب

٢) الجزء الحقيقي للعدد المركب $ع \leqslant |ع|$

البرهان

الجزء الحقيقي للعدد المركب $ع = أ + ب ت$ هو $أ$

حيث $أ \leqslant \sqrt{أ^2 + ب^2} \Leftarrow أ \leqslant |ع|$ ولكن $أ = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

عندما تكون $ب$ = صفر فقط.

٣) إذا كانت $ع_1$ ، $ع_2$ أعدادا مركبة فإن: (تسمى هذه الخاصية بمتباينة المثلث

$|ع_1 + ع_2| \leqslant |ع_1| + |ع_2|$

البرهان:

لكي نبرهن على هذه الخاصية يجب أن نعتمد على الملاحظة التي تقول بأن

$|ع|^2 = ع \cdot \bar{ع}$ حيث ع عدد مركب وعليه فإن

$|ع_1 + ع_2|^2 = (ع_1 + ع_2)\ (\overline{ع_1 + ع_2})$

لكن $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$

$\therefore |ع_1 + ع_2|^2 = (ع_1 + ع_2)\ (\bar{ع}_1 + \bar{ع}_2) = ع_1 \cdot \bar{ع}_1 +$
$ع_1 \cdot \bar{ع}_2 + ع_2 \cdot \bar{ع}_1 + ع_2 \cdot \bar{ع}_2$

$= |ع_1|^2 + ع_1 \cdot \bar{ع}_2 + ع_2 \cdot \bar{ع}_1 + |ع_2|^2$

لكن $ع_2 \cdot \bar{ع}_1$ مرافق للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2$ (تأكد من ذلك)

$\therefore ع_1 \cdot \bar{ع}_2 + ع_2 \cdot \bar{ع}_1$ = ضعفي الجزء الحقيقي للعدد $ع_1 \cdot \bar{ع}_2$

وذلك اعتمادا على الخاصية السابقة التي تقول بأن حاصل جمع عدد مع مرافقه يساوي ضعفي الجزء الحقيقي للعدد.

∴ $|ع_1 + ع_2|^2 = |ع_1|^2 + 2$ الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2 + |ع_2|^2$

$= (|ع_1| + |ع_2|)^2 + 2$ الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2 - 2|ع_1| \cdot |ع_2|$

∴ $|ع_1 + ع_2|^2 - (|ع_1| + |ع_2|)^2 = 2$ (الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2 - |ع_1| \cdot |ع_2|$)

لكن الجزء الحقيقي لمقدار $\leqslant$ مقياسه حسب الخاصية الثانية السابقة .

∴ الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2 \leqslant |ع_1 \cdot \bar{ع}_2| = |ع_1|$
$|ع_2|$ لأن $|\bar{ع}_2| = |ع_2|$

∴ الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 \cdot \bar{ع}_2 - |ع_1| \cdot |ع_2| \leqslant$ صفر

وعليه فإن

$|ع_1 + ع_2|^2 - (|ع_1| + |ع_2|)^2 \leqslant$ صفر

∴ $|ع_1 + ع_2|^2 \leqslant (|ع_1| + |ع_2|)^2 \Leftarrow$

$|ع_1 + ع_2| \leqslant |ع_1| + |ع_2|$ وهو المطلوب .

٤) $|ع_1 - ع_2| \geqslant |ع_1| - |ع_2|$

البرهان:

$|ع_1 - ع_2|^2 = (ع_1 - ع_2)\,(\overline{ع_1 - ع_2}) = (ع_1 - ع_2)\,(\bar{ع}_1 - \bar{ع}_2)$

$= ع_1 . \bar{ع}_1 - ع_1 . \bar{ع}_2 - ع_2 . \bar{ع}_1 + ع_2 . \bar{ع}_2$

$= |ع_1|^2 - (ع_1 . \bar{ع}_2 + ع_2 . \bar{ع}_1) + |ع_2|^2$

لكن $ع_2 . \bar{ع}_1$ مرافق للعدد $ع_1 . \bar{ع}_2$ وحاصل جمعهما = ضعفي الجزء الحقيقي للمقدار $ع_1 . \bar{ع}_2$ وبما أن الجزء الحقيقي لمقدار $\leqslant$ مقياس المقدار

∴ $ع_1 . \bar{ع}_2 + ع_2 . \bar{ع}_1 \leqslant 2|ع_1| . |ع_2|$

∴ $|ع_1 - ع_2|^2 \geqslant |ع_1|^2 + |ع_2|^2 - 2|ع_1| . |ع_2|$

∴ $|ع_1 - ع_2|^2 \geqslant (|ع_1| - |ع_2|)^2$

أي أن $|ع_١ - ع_٢| \geqslant |ع_١| - |ع_٢|$ وهو المطلوب .

٥) $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$

البرهان:

$$\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right|^٢ = \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)\overline{\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)} = \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)\cdot\left(\frac{\bar{ع}_١}{\bar{ع}_٢}\right)$$

$$= \frac{ع_١ \cdot \bar{ع}_١}{ع_٢ \cdot \bar{ع}_٢} = \frac{|ع_١|^٢}{|ع_٢|^٢}$$

$\therefore \left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right|^٢ = \frac{|ع_١|^٢}{|ع_٢|^٢}$ فبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج أن

$\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ وهو المطلوب

التمثيل البياني للأعداد المركبة:

لاحظنا أن مجموعة الأعداد المركبة م=ح × ح أي أن كل عدد مركب هو زوج مرتب (أ ، ب) وقد درجت العادة على كتابة هذا العدد على النحو أ+ب ت ويسمى أ الجزء الحقيقي وتسمى ب الجزء التخيلي من العدد المركب .

ومن هنا نلاحظ أن كل عدد مركب يقترن بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية فمثلا

أ+ب ت ⟺ (أ ، ب)

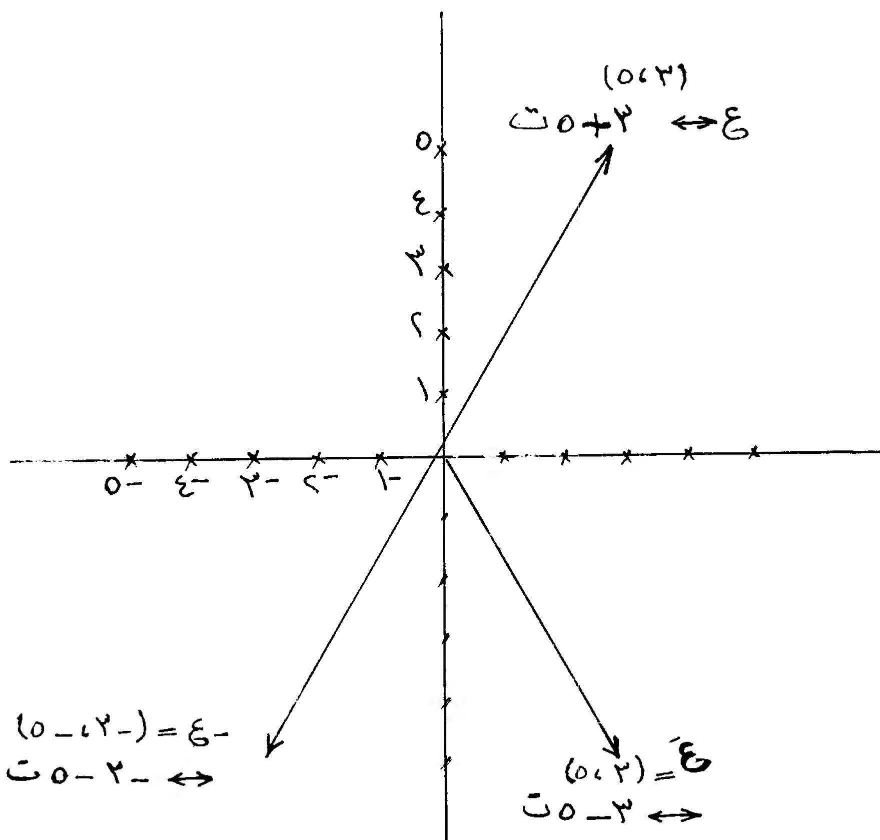
٥+ ٣ ت ⟺ (٥ ، ٣)

٤—٢ ت ⟺ (٤ ، —٢)

وبما أن كل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يمثل متجها في المستوى فإن هناك تناظر بين مجموعة الأزواج الحقيقية ومجموعة المتجات . كذلك هناك

تناظر بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة المتجهات في المستوى .

فمثلا الزوج المرتب (٣ ، ٥) يمثل العدد المركب ٣+ ٥ت والنظير الجمعي للعدد المركب ٣+ ٥ت هو —٣—٥ت . وأما المرافق فهو ٣—٥ت ومن المرسم نلاحظ أن صورة المرافق تمثل انعكاس في محور السينات .

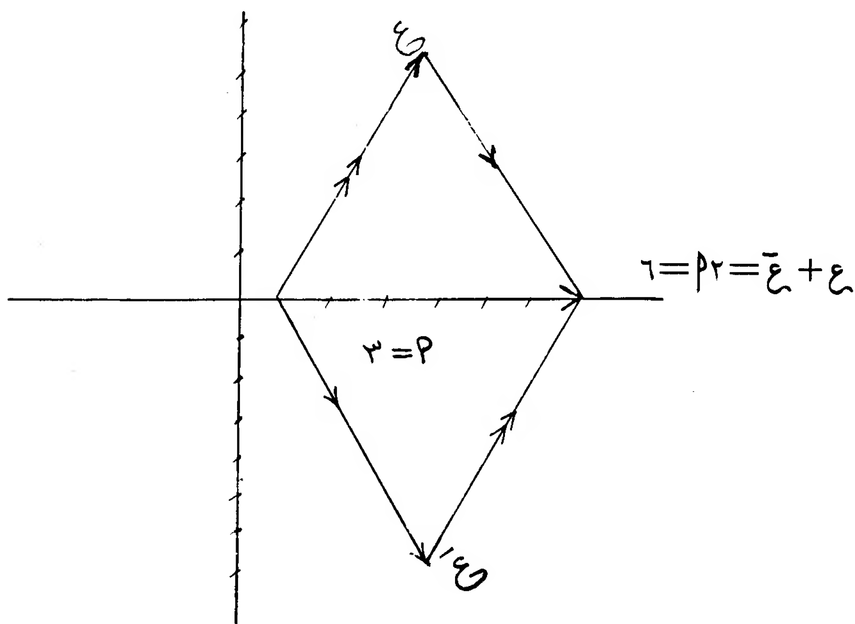


وللتمثيل البياني فوائد كثيرة منها أنه يساعدنا على برهنة كثير من الخواص التي تطرقنا لها سابقا في هذا الموضوع ومن هذه الخواص .

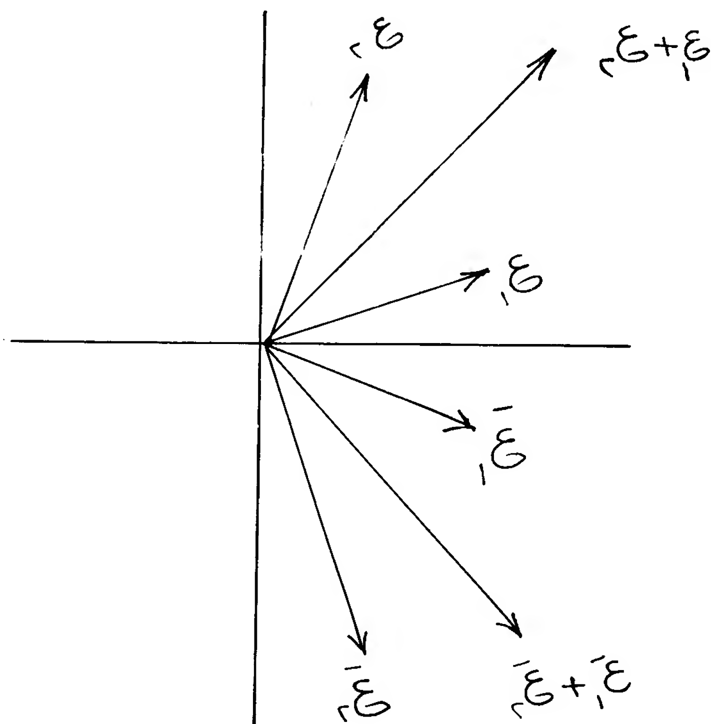
١) ع + ع̄ = ٢م حيث ع = م + ب ت

وذلك باكمال متوازي الأضلاع

∴ ع + ع̄ = ٢م = ٦ حيث م = ٣



٢) $\overline{م_١ + م_٢} = \bar{م}_١ + \bar{م}_٢$

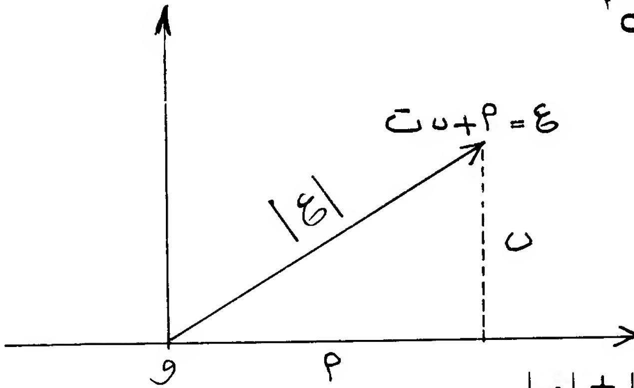


٣) $|ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2}$ حيث $ع = أ + ب\,ت$

حسب نظرية فيثاغورس فإن:

$\overline{وع}^2 = أ^2 + ب^2$ لكن $وع = |ع|$

$\therefore |ع| = \sqrt{أ^2 + ب^2}$



٤) $|م_1 + م_2| \leqslant |م_1| + |م_2|$

فإذا أخذنا المثلث س ص ع فمن المعروف أن أي ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين. وعليه فإن:

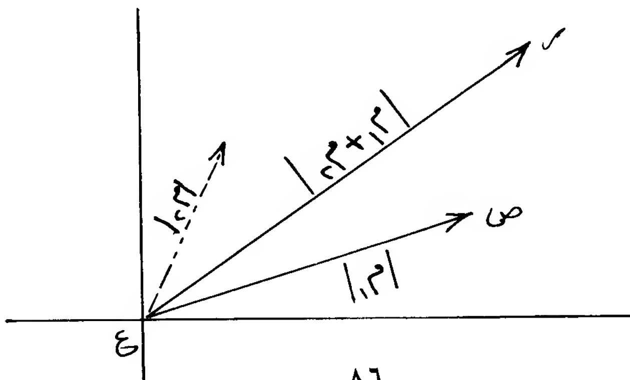
$س\,ع = |م_1 + م_2|$

$ص\,ع = |م_1|$

$س\,ص = |م_2|$

$\therefore س\,ع \leqslant ص\,ع + س\,ص$

أي أن $|م_1 + م_2| \leqslant |م_1| + |م_2|$ ولكن المساواة تتحقق إذا كان $م_1$ ، $م_2$ على استقامة واحدة.



التمثيل المثلثي القطبي للأعداد المركبة:

لقد قلنا بأن كل عدد يمكن أن يمثل بزوج من الأعداد الحقيقية في المستوى فمثلا ع = (أ ، ب) = أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح

هذا وان العدد المركب يمثل متجها في المستوى بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة (أ ، ب)

فلو فرضنا أن طول هذا المتجه = ر وأن الزاوية التي يضعها المتجه مع محور السينات الموجب ي .

فإنه يمكن تمثيل العدد المركب أ + ب ت بواسطة (ر ، ي) بالشكل التالي

أ = ر جتاي ، ب = ر جاي وعليه فإن

ع = ر جتاي + ر حاي ت وهذا التمثيل يسمى التمثيل المثلثي (القطبي) أو تمثيل آرجاند .

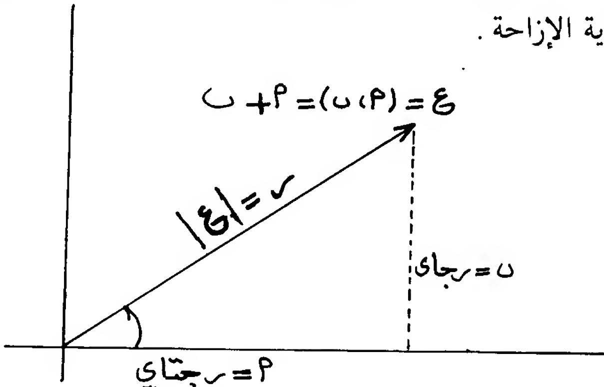
وتسمى ر بمقياس العدد المركب ع بينما ي تسمى زاوية الإزاحة للعدد المركب أو تسمى سعة العدد المركب ع .

حيث ر = |ع| = $\sqrt{أ^{2} + ب^{2}}$

ي = ي + ٢ د ط حيث د = ٠ ، ± ١ ، ± ٢ ، . .

لأن العدد المركب يعين أكثر من زاوية

إما إذا كانت − ط ≤ ي ≤ ط فتسمى ي القيمة الأساسية لسعة ع أو القيمة الأساسية لزاوية الإزاحة .



مثال ١ : مثل العدد المركب بالتمثيل القطبي (المثلثي) حيث ع = ١ + ت

الحل:

أ = ر جتا ي ⇔ ١ = ر جتا ي

ب = ر حا ي ⇔ ١ = ر حا ي

∴ ر جتا ي = ر حا ي بالقسمة على جتا ي ينتج أن

$$\frac{ر\ جتا\ ي}{ر\ جتا\ ي} = \frac{ر\ جا\ ي}{ر\ جتا\ ي} \Leftarrow طا\ ي = ١ \Leftarrow ي = \frac{ط}{٤}$$

$$ر = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{١^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢} \Leftarrow$$

∴ ع = ر جتا ي + ت ر جا ي = ر (جتا ي + ت حا ي)

= $\sqrt{٢}$ (جتا ي + ت حا ي) حيث

ي = $\frac{ط}{٤}$ + ٢ ن ط

مثال ٢ :

جد مقياس وسعة العدد المركب ع = $\frac{٢\ ت}{\sqrt{٣} + ت}$

الحل:

$$ع = \frac{٢\ ت}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} = \frac{٢\sqrt{٣}\ ت - ٢ت^٢}{٣ - ت^٢}$$

$$= \frac{٢\sqrt{٣}\,ت - ٢(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{٢\sqrt{٣}\,ت + ٢}{٤} = \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت}{٤}$$

$$= \frac{٢}{٤} + \frac{٢\sqrt{٣}}{٤}\,ت = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$$

$$\therefore\ ٲ = \frac{١}{٢}\ ،\ ب = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$ر = \sqrt{ٲ^٢ + ب^٢} = \sqrt{(\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = \sqrt{١} = ١$$

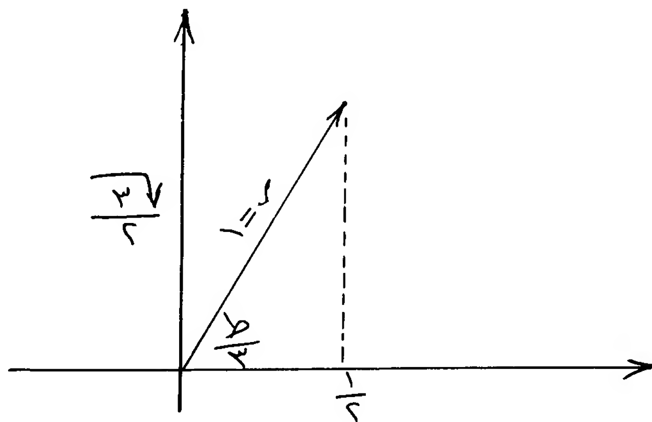
$$ٲ = ر\ جتا\ ي \Leftarrow \frac{١}{٢} = جتا\ ي \Leftarrow ي = \frac{ط}{٣}$$

$$ب = ر\ جا\ ي \Leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢} = جا\ ي \Leftarrow ي = \frac{ط}{٣}$$

$\therefore$ القيمة الأساسية للسعة $= \frac{ط}{٣}$ بينما السعة $= \frac{ط}{٣} + ٢\,ى\,ط$

$\therefore\ ع = ر\ (جتا\ ي + ت\ جا\ ي)$

$$١\ [جتا\ (\frac{ط}{٣} + ٢\,ى\,ط) + ت\ جا\ (\frac{ط}{٣} + ٢\,ى\,ط)]$$



تمثيل النظير الجمعي للعدد المركب ع :

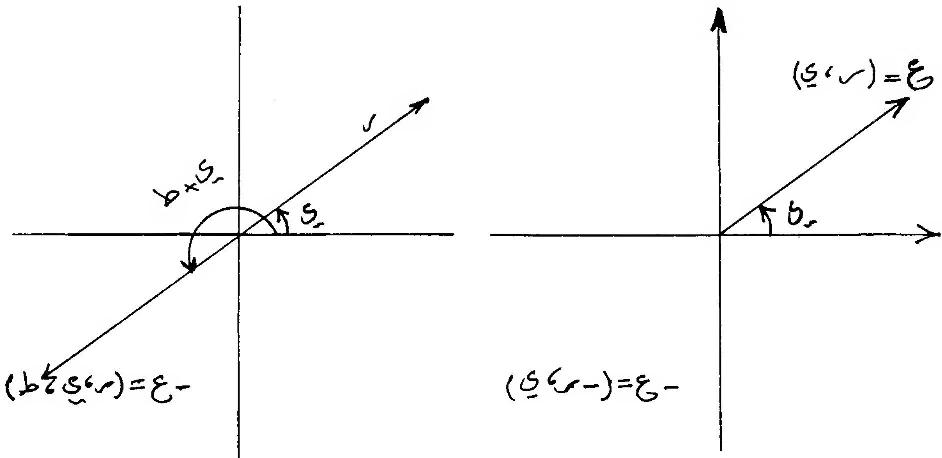
إذا كان ع = أ + ب ت **ممثلاً بالاحداثيات القطبية (ر، ي)** بالشكل

ع = ر (جتا ي + ت حا ي) فإن

— ع = — ر (جتا ي + ت حا ي)

= ر (— جتا ي — ت حا ي)

= ر [جتا (ي + د ط) + ت حا (ي + د ط)]



من الرسم نلاحظ أن سعة (— ع) = سعة ع + د ط حيث د عدد فردي .

تمثيل مرافق العدد المركب:

إذا كانت ع = ر (جتا ي + ت حا ي)

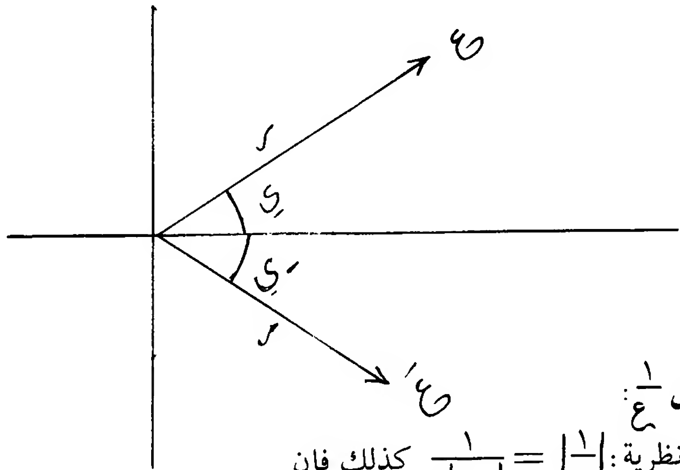
عَ = ر (جتا ي — ت حا ي)

= ر [جتا (—ي) + ت حا (—ي)] وذلك لأن

جتا ي = جتا (— ي)، حا ي = — [حا (—ي)]

لذلك فإن سعة عَ = — سعة ع

أي أن سعة المرافق = — سعة العدد نفسه



تمثيل $\frac{1}{\text{ع}}$:

نظرية: $\left|\frac{1}{\text{ع}}\right| = \frac{1}{|\text{ع}|}$ كذلك فإن

سعة $\frac{1}{\text{ع}} = -$ سعة ع .

البرهان:

$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ع}\cdot\bar{\text{ع}}}$ أي بضرب كل من البسط والمقام بالمرافق .

$$\therefore \left|\frac{1}{\text{ع}}\right| = \frac{|1|}{|\text{ع}|} = \frac{1}{|\text{ع}|} = \frac{|\bar{\text{ع}}|}{|\text{ع}|\cdot|\bar{\text{ع}}|}$$

لكن $|\text{ع}| = |\bar{\text{ع}}|$

$$\therefore \left|\frac{1}{\text{ع}}\right| = \frac{|\bar{\text{ع}}|}{|\text{ع}|\cdot|\text{ع}|} = \frac{|\text{ع}|}{|\text{ع}|^{2}} = \frac{|\text{ع}|}{\text{ر}^{2}} = \frac{\text{ر}}{\text{ر}^{2}}$$

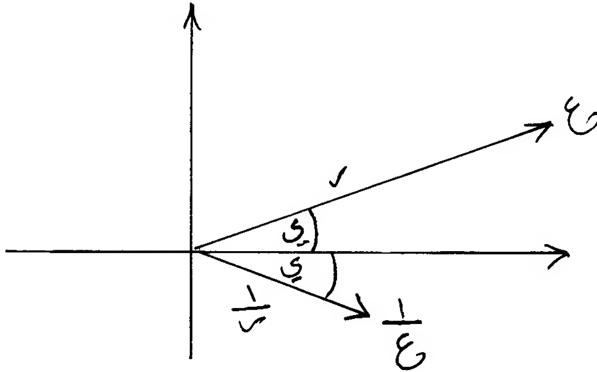
$$= \frac{1}{\text{ر}} = \frac{1}{|\text{ع}|}$$

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ع}\cdot\bar{\text{ع}}} = \frac{1}{\text{ر}^{2}}\cdot\bar{\text{ع}} = \frac{1}{\text{ر}^{2}}\ \text{ر}\,(\text{جتاي} - \text{ت حاي})$$

$$= \frac{1}{\text{ر}}\,(\text{جتاي} - \text{ت حاي})$$

$= \frac{١}{ر} \left(جتا\,(-ي) + ت\ حا\,(-ي) \right)$

∴ سعة $\frac{١}{ع}$ = سعة $\bar{ع}$ = − سعة ع وهو المطلوب .



تمثيل $ع_١ \times ع_٢$ بالاحداثيات المثلثية :

نفرض أن $ع_١ = ر_١ \,(جتا\ ي_١ + ت\ حا\ ي_١)$

$ع_٢ = ر_٢ \,(جتا\ ي_٢ + ت\ حا\ ي_٢)$

∴ $ع_١ \times ع_٢ = ر_١\, ر_٢ \,[جتا\ ي_١\ جتا\ ي_٢ + ت\ جتا\ ي_١\ حا\ ي_٢ + ت\ حا\ ي_١\ جتا\ ي_٢ + ت^٢\ حا\ ي_١\ حا\ ي_٢]$

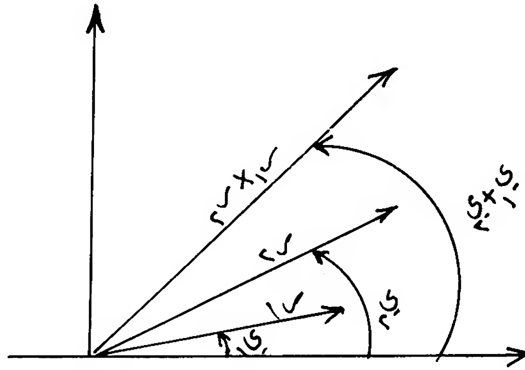
$= ر_١\, ر_٢ \,[جتا\ ي_١\ جتا\ ي_٢ + (جتا\ ي_١\ حا\ ي_٢ + حا\ ي_١\ جتا\ ي_٢)\ ت - حا\ ي_١\ حا\ ي_٢]$

$= ر_١\, ر_٢ \,[(جتا\ ي_١\ جتا\ ي_٢ - حا\ ي_١\ حا\ ي_٢) + (جتا\ ي_١\ حا\ ي_٢ + حا\ ي_١\ جتا\ ي_٢)\ ت]$

$= ر_١\, ر_٢ \,[جتا\ (ي_١ + ي_٢) + ت\ حا\ (ي_١ + ي_٢)]$

لذلك فإن سعة $(ع_١ \times ع_٢)$ = سعة $ع_١$ + سعة $ع_٢$.

ومقياس $(ع_١ \times ع_٢)$ = مقياس $ع_١$ × مقياس $ع_٢$.



تمثيل $\frac{ع_1}{ع_2}$ بالاحداثيات القطبية :

سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right) =$ سعة $ع_1 -$ سعة $ع_2$

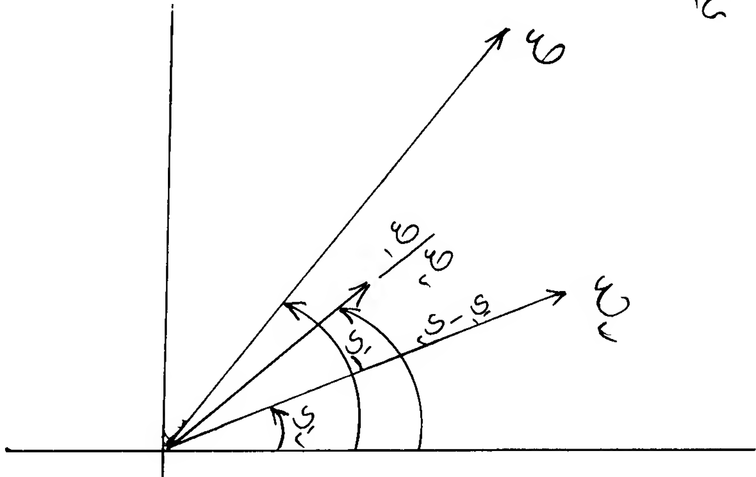
البرهان:

سعة $(ع_1 \times ع_2) =$ سعة $ع_1 +$ سعة $ع_2$.

لكن $\frac{ع_1}{ع_2} = ع_1 \times \frac{1}{ع_2}$

$\therefore$ سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right) =$ سعة $ع_1 +$ سعة $\frac{1}{ع_2}$ لكن سعة $\frac{1}{ع_2} = -$ سعة $ع_2$

$\therefore$ سعة $\frac{ع_1}{ع_2} =$ سعة $ع_1 -$ سعة $ع_2$ وهو المطلوب



ملاحظة: لا نستطيع أن نحكم أو نستنتج قاعدة لايجاد سعة $ع_1 + ع_2$ وسعة $ع_1 - ع_2$.

نظرية دي موافر:

إذا كانت ن عددا صحيحا وكانت ي عددا حقيقيا فإن (جتا ي + ت حا ي)^ن = حتا ن ي + ت حا ن ي .

البرهان:

هناك ثلاثة امكانيات للعدد ن وهي:

١) أن تكون ن = صفر وعليه فإن

(جتاي + ت حاي)^{صفر} = جتا صفر ي + ت حا صفر ي

= جتا صفر + ت حا صفر

= ١ + صفر

∴ تتحقق النظرية

٢) أن تكون ن عددا صحيحا موجبا وعليه فإن

(جتا ي + ت حاي)^ن = (جتاي + ت حاي) (جتا ي + ت حاي)...(جتا ي + ت حا ي) (ن من المرات).

وهذه تمثل حاصل ضرب أعداد مركبة معطاة بالتمثيل القطبي.

لذلك فان سعتها = سعة الأول + سعة الثاني + ... + سعة النوني

وبما أن سعة كل منهما ي

∴ سعة حاصل الضرب = ن ي إذن.

(جتاي+ ت حاي)^ن = جتا ن ي + ت حا ن ي.

٣) أن تكون ن عددا صحيحا سالبا، ولنفرض أن ن = — م مثلا.

$$\therefore\ (\text{جتا ي} + \text{ت حا ي})^{-م} = (\text{جتا ي} + \text{ت حا ي})^{-م}$$

$$= \frac{1}{(\text{جتا ي} + \text{ت حا ي})^{م}} + \frac{1}{(\text{جتا م ي} + \text{ت حا م ي})}$$

$$= \frac{\text{جتا م ي} - \text{ت حا م ي}}{(\text{جتا م ي} + \text{ت حا م ي})\,(\text{جتا م ي} - \text{ت حا م ي})}$$

$$= \frac{\text{جتا م ي} - \text{ت حا م ي}}{\text{جتا}^{2}\,\text{م ي} + \text{حا}^{2}\,\text{م ي}}$$

$= \text{جتا م ي} - \text{ت حا م ي}$ حيث المقام ١

$= \text{جتا}\ (-\ \text{م ي}) + \text{ت حا}\ (-\ \text{م ي})$

$= \text{جتا}\ (\text{د ي}) + \text{ت حا}\ (\text{د ي})$ وهو المطلوب.

مثال ١

برهن على أن

$$\frac{(\text{جتا } 30 + \text{ت حا } 30)^{5}\,(\text{جتا } 40 + \text{ت حا } 40)^{6}}{(\text{جتا } 75 + \text{ت حا } 75)^{4}} = \text{ت}$$

الحل:

$(\text{جتا } 30 + \text{ت حا } 30)^{5} = \text{جتا } 5 \times 30 + \text{ت حا } 5 \times 30$

$= \text{جتا } 150 + \text{ت حا } 150$ (من نظرية دي موافر)

كذلك $(\text{جتا } 40 + \text{ت حا } 40)^{6} = \text{جتا } 6 \times 40 + \text{ت حا } 6 \times 40$

$= \text{جتا } 240 + \text{ت حا } 240$

$(\text{جتا } 75 + \text{ت حا } 75)^{4} = \text{جتا } 4 \times 75 + \text{ت حا } 4 \times 75$

$= \text{جتا } 300 + \text{ت حا } 300$

$$\therefore\ \frac{(\text{جتا } 30 + \text{ت حا } 30)^{5}\,(\text{جتا } 40 + \text{ت حا } 40)^{6}}{(\text{جتا } 75 + \text{ت حا } 75)^{4}}$$

$$= \frac{(\text{جتا } ١٥٠ + \text{ت حا } ١٥٠)(\text{جتا } ٢٤٠ + \text{ت حا } ٢٤٠)}{\text{جتا } ٣٠٠ + \text{ت حا } ٣٠٠}$$

$$= \frac{\text{جتا } ٣٩٠ + \text{ت حا } ٣٩٠}{\text{جتا } ٣٠٠ + \text{ت حا } ٣٠٠}$$

لأن سعة حاصل ضرب عددين مركبين يساوي سعة الأول + سعة الثاني.

= جتا ٩٠ + ت حا ٩٠ = صفر + ت = ت

لاحظ أن سعة حاصل قسمة عددين مركبين = سعة البسط - سعة المقام

مثال ٢

استخدم نظرية دي موافر لاختصار المقدار التالي

$$\frac{(\text{حا ي} - \text{ت جتا ي})^{٤}}{(\text{جتا هـ} + \text{ت حا هـ})^{٢}}$$

الحل:

لا نستطيع أن نطبق نظرية دي موافر على البسط مباشرة لكن يمكن جعله بالصيغة التي نستطيع أن نطبق النظرية وذلك بالاستفادة من بعض القوانين وهي:

حا الزاوية = جتا المتممة لها.

∴ حا ي = جتا (٩٠ − ي)

جتا ي = حا (٩٠ − ي)

$$\therefore \frac{(\text{حا ي} - \text{ت جتاي})^{٤}}{(\text{جتا هـ} + \text{ت حا هـ})^{٢}} = \frac{[\text{جتا }(٩٠ - \text{ي}) - \text{ت حا}(٩٠ - \text{ي})]^{٤}}{\text{جتا ٢ هـ} + \text{ت حا ٢ هـ}}$$

$$= \frac{[\text{جتا}(٣٦٠ - ٤\text{ي}) - \text{ت حا}(٣٦٠ - \text{ي})]^{٤}}{\text{جتا ٢ هـ} + \text{ت حا ٢هـ}}$$

$$= \frac{\text{جتا } ٤ \text{ ي} + \text{ت حا } ٤ \text{ ي}}{\text{جتا } ٢\text{م} + \text{ت حا } ٢\text{م}}$$

$$= \text{جتا } (٤\text{ي} - ٢\text{م}) + \text{ت حا } (٤\text{ي} - ٢\text{م})$$

لأن سعة حاصل قسمة عددين مركبين يعطي عددا مركبا سعته = سعة البسط — سعة المقام.

[١-٦] الأعداد المعيارية:

كثيرا ما نربط مفهوم العدد مع عناصر مجموعة معينة فالمجموعة أ = {س١ ، س٢ ، س٣} مجموعة منتهية تتكون من ٣ عناصر أما مجموعة الأعداد الطبيعية ط* = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..} فهي غير منتهية ، ولكنها معدودة والسؤال الذي ينشأ هنا هو ما هو العدد الدال على عناصر هذه المجموعة؟ إن هذه الأمثلة وغيرها الكثير يقودنا إلى مفهوم العدد المعياري وهو العدد الدال على عناصر مجموعة معطاة.

وواضح من هنا أن العدد المعياري للمجموعة المنتهية ع هو عدد طبيعي يمثل عدد عناصر تلك المجموعة وسنرمز له بالرمز ||ع||، أما العدد المعياري لمجموعة الأعداد الطبيعية فاتفق على تسميته $\aleph_0$ ويقرأ « ألف صفر » كما يسمى العدد المعياري لمجموعة الأعداد الحقيقية C (ويقرأ سي).

واتفق على أن العدد القياسي للمجموعة أ يساوي العدد القياسي للمجموعة ب إذا وجد اقتران تناظر (واحد لواحد وشامل) من أ إلى ب.

مثال (١):

أوجد العدد القياسي لمجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ز = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...}

الحل:

ليكن ه : ط* ← ز اقتراناً بحيث أن:

ه (س) = ٢ س

من الواضح أن ه اقتران تناظر.

إذن ‖ ز ‖ = ‖ ط* ‖ = $\aleph$

مثال (٢)

أوجد العدد القياسي للفترة] − $\frac{ط}{٢}$، $\frac{ط}{٢}$ [حيث ط النسبة التقريبية.

الحل: لنعرف الاقتران

ه :] − $\frac{ط}{٢}$، $\frac{ط}{٢}$ [← ح

حيث ه (س) = ظا س

من الواضح أن ه اقتران تناظر

إذن ‖] − $\frac{ط}{٢}$، $\frac{ط}{٢}$ [‖ = ‖ ح ‖ = C

وموضوع آخر يتعلق بالأعداد المعيارية هو موضوع مقارنة هذه الأعداد ايها أكبر من الآخر.

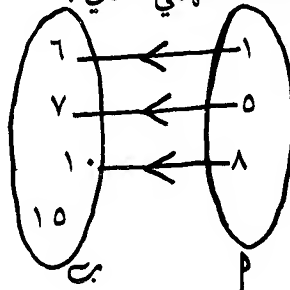
مثال (٣)

لتكن أ = {١، ٥، ٨}، ب = {٦، ٧، ١٠، ١٥}

إذن ‖ أ ‖ = ٣، ‖ ب ‖ = ٤

وواضح أن ‖ أ ‖ < ‖ ب ‖

ويمكن تفسير ذلك بوجود اقتران واحد لواحد وغير شامل من أ إلى ب مثل الاقتران المعرف بالمخطط السهمي التالي.



مثال (٤)

أيهما أكبر $\aleph_0$ أو C ؟

الحل: تعلم أن $\aleph_0$ = || ط* ||

٢ = || ح ||

ولنعرف الاقتران ه : ط* ← ح

ه (س~) = س~ .

من الواضح ان ه اقتران واحد لواحد وغير شامل.

إذن || ط* || < || ح || .

تمارين على الفصل الأول

١) حول الكسور الدورية التالية إلى كسور عشرية منتهية:

$\overline{٠,٤}$ ، ٠,٣$\overline{٤}$ ، ٠,$\overline{٢٤}$ ، ٠,٥$\overline{١٤}$ ، ٣,٢$\overline{١٤}$.

٢) برهن أن كلاً من الأعداد التالية ليس عدداً نسبياً:

$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{٧}$.

٣) استعمل أسلوباً هندسياً لتمثيل كل من الأعداد التالية على خط الأعداد الحقيقية:

٤ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٢}{٧}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{٦}$.

٤) اوجد أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى لكل من المجموعات التالية إن وجدت:

[٣ ، ٨] ، [-٨ ، ٩[،]-٥ ، ٦[.

ط ، ص ، ح$^{+}$

٥) بالاعتماد على تعاريف مجموعات الأعداد ط، ص، ن، ح، م المعطى في هذا الفصل من خلال صفوف التكافؤ بين أن

أ) ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح ⊂ م.

ب) عمليات الجمع والضرب هي امتداد لتعريفاتها على المجموعات الجزئية السابقة.

فمثلا إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ ، ب ∈ ن فهل.
عملية جمع أ + ب كعددين صحيحين هي نفس عملية جمعهما كعددين نسبيين وهكذا لبقية العمليات لبقية المجموعات.

٦) استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لاثبات صحة الجمل التالية لجميع قيم ن ∈ ط*

أ) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ن = $\frac{ن}{٢}$ (١+ن).

ب) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \ldots + (\frac{١}{٢})^{ن} = ١ - (\frac{١}{٢})^{ن}$

جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{ن}{ر})$ أ^{ر} ب$^{ن-ر}$ = (أ + ب)^{ن} .

د) $(\frac{ن}{٠}) + (\frac{ن}{١}) + (\frac{ن}{٢}) + \ldots + (\frac{ن}{ن}) = ٢^{ن}$

٧) أي من الأنظمة التالية تشكل نصف زمرة وأيها يشكل زمرة وأيها يشكل حلقة وأيها يشكل حقلا وأيها حلقة مرتبة موضحا إجابتك بالأسباب

(ط، ×)، (ط، +) ، (ط، −) ، (ط، ÷)

(ص ، ×) ، (ص ، +) ، (ص ، −)، (ص ، ÷)

(ك ، ×)، (ك ، +)، (ع ، ×)، (ع ، +)

(م ، ×) ، (م ، +)، (ط ، × ، +)، (ص ، × ، +)

(ك ، × ، +)، (ع ، × ، +)، (ع ، + ، ×)

(م ، + ، ×)، (ص ، + ، ×)

٨) اكتب الأعداد التالية على صورة قوى للأساسات المبينة

أ) $(٣٧٦٢)_{١٠}$. ب) $(٢٣١)_{٤}$

جـ) $(١٠١١١١)_{٢}$

٩) حول الأعداد التالية للأساس عشرة

أ) $(٢٣٤)_{٥}$ ب) $(٥٠٣)_{٧}$ جـ) $(١١٠١)_{٢}$

١٠) حول الأعداد التالية للأساس ٢

أ) ٥٤٣ ب) $(١٧٢)_{٥}$ جـ) ٤١٠

١١) أوجد ناتج العمليات التالية:

أ) $(٣٢١)_{٤} + (١٢٣)_{٤}$

ب) $(٢٥)_{٦} \times (١٣)_{٦}$

حـ) $(٧٥)_{٩} - (٢٦)_{٩}$

د) $(١١٠١)_{٢} + (١١٠١١)_{٢}$

هـ) $(١٠١١)_{٢} \times (١١٠١١)_{٢}$

و) $(١١٠١١)_{٢} - (١٠١)_{٢}$

١٢) كون جدول الجمع والضرب للأساس ٥ واستعن بذلك لحساب المقدار
$(١٤٣)_{٥} \left((١١٢)_{٥} + (٢١٣)_{٥}\right)$

١٣) بين أيا من الأعداد التالية فردية وأيا منها زوجية دون أن تحاول كتابتها في النظام العشري .

$(١١٠١)_{٢}$ ، $(١٠١١)_{٢}$ ، $(١١١٠)_{٢}$

١٤) بين أيا من الأعداد التالية يقبل القسمة على العدد المذكور ازاء كل منها دون أن تحاول كتابتها في النظام العشري

أ) $(٥٤٣)_{٧}$ على ٧

ب) $(٢٤٠)_{٣}$ على ٣

حـ) $(٢١٠)_{٩}$ على ٩

د) $(٢١١)_{٢}$ على ٢

ثم أذكر الشروط الواجب توفرها حتى يكون $(ρ)_{د}$ قابلا للقسمة على د .

١٥) مثل الأعداد المركبة التالية بيانيا ثم أوجد المقياس والسعة والمرافق لكل من

٣ + ٢ ت، ٥ ـ ٧ ت ، ٤ ت ، — ٨ ت ، ٦، — ٨

١٦) أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل من الأعداد المركبة التالية (إن وجدت)

٨ـ٢ت، ٦ + ٤ ت، ١٥ ، —٨ ، ٩ت، — ٨ ت

١٧) أكتب كلا من الأعداد التالية على الصورة ρ + ب ت حيث ρ ، ب ∈ ح ، ت $\sqrt{-١}$

$$\frac{٣ - ٢ت}{٥ - ٧ت} \quad ، \quad \frac{٨ + ٦ت}{ت}$$

$$٣\frac{(٢ + ت\ حا\ ٤٥)}{٦ - ت\ حا\ ٦٠} \quad ، \quad \frac{\sqrt{٣} - ٢ت}{\sqrt{٥} + ت\ حا\ ٣٠}$$

$(حا\ ٣٠ + ت\ جتا\ ٣٠)^{٧}$.

١٨) لتكن ط*، ص، ح، ك، ع مجموعات الأعداد الطبيعية والصحيحة والحقيقة والنسبية والمركبة على الترتيب:

برهن صحة أو عدم صحة الجمل التالية:

أ) ‖ ط* ‖ = ‖ ص ‖

ب) ‖ ص ‖ = ‖ ك ‖

حـ) ‖ ح ‖ = ‖ ع ‖

د) ‖ $ح^{+}$ ‖ = ‖ [٠ ، ١] ‖

حيث $ح^{+}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

الفصل الثاني

الاعداد الاولية

يعالج هذا الفصل مفهوم قابلية القسمة وخواصها هذا بالاضافة إلى مفهوم التحليل إلى العوامل والعوامل الاولية والقاسم المشترك الاعظم والمضاعف المشترك الاصغر، وخواص كل منهما، والعلاقات بينهما، ومن ناحية أخرى فقد تعرضنا في هذا الفصل الى خوارزمية القسمة والنظرية الاساسية في الحساب والمعادلات الديوفانتية وطرق حلها .

[٢-١] قابلية القسمة

اذا كانت ا ، ب $\in$ ط* فاننا نقول ان ا تقسم ب اذا وفقط اذا وجد عدد ك $\in$ ط* بحيث ان ب = ك ا وبالرموز نقول

ا | ب $\Leftrightarrow$ ب = ا ك ، ك $\in$ ط*

وتقرأ ا تقسيم ب اذا وفقط اذا كان ب = ا ك حيث ك عدد طبيعي كما تسمى ا قاسماً (عاملاً) من قواسم (عوامل) ب .

وتسمى ب مضاعفا من مضاعفات ا .

وبشكل عام سنعرف المجموعة ع$_{د}$ على أنها مجموعة العوامل الطبيعية للعدد « د »

ونعرف المجموعة م$_{د}$ على أنها مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد د حيث د $\in$ ط* .

مثلا ع$_{١٢}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢ }

م$_{١٢}$ = { ١٢ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٤٨ ، ... }

ومن هنا نلاحظ أن المجموعة ع$_{د}$ مجموعة منتهية بينما م$_{د}$ مجموعة غير منتهية .

تعريف (١)

نقول بأن أ تقسم ب ونرمز لها بالرمز أ | ب اذا وفقط اذا وجد عدد صحيح مثل ء بحيث أ ء = ب

نظرية (١):

اذا كان ء | أ ، ء | ب فإن ء | (أ+ب)

البرهان: بما أن ء | أ ⇐ ء حـ = أ كذلك

ء | ب ⇐ ء هـ = ب

∴ ء حـ + ء هـ = أ + ب

ء (حـ + هـ) = أ + ب لكن (حـ + هـ) عدد صحيح

∴ ء | (أ + ب)

مثال (١)

برهن انه اذا كان ء | أ فإن ء | حـ أ حيث حـ عدد صحيح

البرهان:

بما أن ء | أ ⇐ ء.ك = أ

∴ حـ أ = حـ . ء ك = ء حـ ك = ء (حـ ك)

حـ أ = ء (حـ ك) لكن حـ ك عددا صحيحا

∴ ء | حـ أ وهو المطلوب.

مثال (٢)

برهن انه:

اذا كان ء | (أ+ب)، ء | أ فإن ء | ب

البرهان:

ء | (أ+ب) ⇐ أ+ب = ك ء$_{1}$

ء | أ ⇐ أ = ك ء$_{2}$

إذن $أ + ب = ل_{٢} د + ب = ل_{١} د$

ومنها $ب = د \; (ل_{١} - ل_{٢})$، $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ عدد صحيح

$\therefore$ $د \mid ب$ اذا كان $ل_{١} \neq ل_{٢}$

أما اذا كان $ل_{١} = ل_{٢}$ فإن $ب =$ صفر (لماذا؟)

وعندها $د \mid ب$ وهو المطلوب.

[٢-٣] القاسم المشترك الاعظم، والمضاعف المشترك الاصغر

مثال (٣) من المعلوم أن مجموعة عوامل العدد ١٢ هي

$ع_{١٢} = \{١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢\}$

وإن مجموعة عوامل العدد ٥٦ هي:

$ع_{٥٦} = \{١، ٢، ٤، ٧، ٨، ١٤، ٢٨، ٥٦\}$

$ع_{١٢} \cap ع_{٥٦} = \{١، ٢، ٤\}$

وإن أكبر العوامل (القواسم) المشتركة للعدين ١٢، ٥٦ هو العدد ٤ لهذا فإن العدد ٤ يسمى القاسم المشترك الاعظم للعددين ١٢، ٥٦ وسوف نرمز له بالرمز $١٢ \triangle ٥٦ = ٤$ والرمز $\triangle$ يقرأ دلتا وبشكل عام.

$م \triangle د =$ عظمى $(ع_{م} \cap ع_{د})$

ومن ناحية اخرى تكون مجموعة العوامل الاولية للعدد ١٢ هي $أ_{١٢} =$ $\{٢، ٣\}$.

وإن مجموعة العوامل الاولية للعدد ٥٦ هي

$أ_{٥٦} = \{٢، ٧\}$

ولهذا فإن $أ_{١٢} \cap أ_{٥٦} = \{٢\}$

مثال (٤)

اوجد

أ) $٧ \triangle ٩$

ب) $أ_{٧} \cap أ_{٩}$

الحل: أ) من الواضح أن $ع_٧$ = { ١، ٧}، $ع_٩$ = {١، ٣، ٩}

لهذا فإن ٧△٩ = عظمى ($ع_٧ \cap ع_٩$) = عظمى {١} = ١

ب) $م_٧$ = {٧}، $م_٩$ = {٣}

لهذا فإن $م_٧ \cap م_٩ = \emptyset$

ان امثال العددين ٧ ، ٩ تسمى أعداداً أولية نسبياً.

وبشكل عام نقول أن م، د اعداداً أولية نسبياً وإذا فقط

إذا كان م △ د = ١

وبشكل آخر نقول ان م، د أعداداً أولية نسبياً إذا وفقط اذا كان:

$م_م \cap م_د = \emptyset$.

طريقة خوارزمية القسمة لايجاد القاسم المشترك الأعظم

عند قسمة العدد ٩ على ٢ يكون الناتج ٤ والباقي ١ .

كما يمكن ملاحظة أن ٩ = ٢ × ٤ + ١ .

أي أن المقسوم = المقسوم عليه × الناتج + الباقي

وبشكل عام اذا كانت م ، ن ∈ ط*: فإنه يوجد عددان

ى، ر ∈ ط .

بحيث أن م = ن ى + ر حيث ٠ ≤ ر < ن

تسمى هذه الخاصية بخوارزمية القسمة.

وهذه الخاصية تستعمل في ايجاد القاسم المشترك الاعظم.

والملاحظات التالية تمثل طريقة ايجاد القاسم المشترك الاعظم بالاستفادة من هذه الخاصية.

إذا كان م ، ن ∈ ط* فإن:

م = ن ى + ر حيث ٠ ≤ ر < ن

اذا كانت $ر$ = صفراً نقف عند هذه الخطوة ويكون ب = أ △ ب
(لماذا ؟)

اما اذا كانت $ر \neq$ صفرا فإننا نطبق خوارزمية القسمة مرة أخرى على ب ، ر

فيكون ب = ر ى$_1$ + ر$_1$ حيث $\cdot \leq$ ر$_1$ < ر

وهكذا نكرر العملية مثلا ن + ٢ مرة ليصبح الباقي ر$_{ن+1}$ = صفرا

وعندها يكون ر$_ن$ = أ △ ب

والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٥) :

أوجد ٣٨ △ ٣ باستعمال خوارزمية القسمة

الحل :

٣٨ = [٣] × ١٢ + ٢

٣ = [٢] × ١ + ١

٢ = [١] × ٢ + ٠

∴ ٣٨ △ ٣ = ١

مثال (٦)

أوجد عددين صحيحين س ، ص بحيث أن ٣ س + ٤ ص = ١

بواسطة الحزر نستطيع أن نقول س = ٣ ، ص = ٢

ولكن هذا الاسلوب غير ممكن دائما لهذا فسنحاول الاستفادة من خوارزمية القسمة لايجاد س ، ص مع ملاحظة أن ٣ △ ٤ = ١

٤ = ٣ × ١ + ١

١ = ١ × ١ + ٠

$١ = ٤ - ٣ = ٤ \times ١ + ٣ \times ١ - ١$ لهذا يمكن ان نأخذ $ص =$ ١ ، $س = -١$

لاحظ ان الحل لهذه المسألة ليس وحيداً ، وفي الواقع يوجد عدد لا نهائي من الحلول وهناك طريقة ثالثة لايجاد القاسم المشترك الأعظم عن طريق كتابة كل عدد في الصورة القياسية كحاصل ضرب أعداد أولية والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٧)

أوجد ٥٢٥ $\triangle$ ٤٤٥٥ باستعمال طريقة التحليل

الحل : نكتب هذين العددين على الصورة القياسية على النحو التالي

$٥٢٥ = ٣^{١} \times ٥^{٢} \times ٧^{١}$

$٤٤٥٥ = ٣^{٤} \times ٥^{١} \times ١١$

نلاحظ أن اكبر قوة للعدد ٣ في كلا التعبيرين هي ٣

وكذلك بالنسبة للعدد ٥ لهذا .

فإن حاصل ضربهما ١٥ هو القاسم المشترك الاعظم (فسر ذلك)

مثال (٨)

مجموعة مضاعفات العدد ٦ هي

$م_{٦}$ = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٤٢ ، ٤٨ ، ٥٤ ، ٦٠ ، ٦٦ ، ٧٢ ، .... }

وكذلك مجموعة مضاعفات العدد ١٥ هي :

$م_{١٥}$ = { ١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ... } .

لهذا فإن مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين ٦ ، ١٥ هي :

$م_{٦} \cap م_{١٥}$ = { ٣٠ ، ٦٠ ، ٩٠ ، ... }

ومن هنا يكون العدد ٣٠ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٦ ، ١٥ وبالرمز نقول :

٦ ▽ ١٥ = ٣٠ (والرمز ▽ يقرأ نبلا)

وبشكل عام نقول ان المضاعف المشترك الاصغر للعددين سـ ، صـ هو

سـ ▽ صـ = صغرى (مسـ ∩ مصـ)

كما يمكن الاستفادة من النظرية الاساسية في الحساب (التحليل) لايجاد المضاعف المشترك الاصغر اذا فرضنا أن م =١

والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٩):

أوجد ١٢ ▽ ٥٦ بالتحليل

الحل: نكتب العددين ١٢ ، ٥٦ في الصورة القياسية على النحو

١٢ = ٢² × ٣

٥٦ = ٢³ × ٧

وبالاستفادة من الفرض القائل بأن م = ١ يكون

١٢ = ٢² × ٣ × ٧⁰

٥٦ = ٢³ × ٣⁰ × ٧

فإن ٢³ سيظهر في المضاعف لكل منهما، وكذلك ٣¹ ، ٧¹ أي أننا نختار العوامل بأكبر الاسس ثم تضرب الناتج فيكون هو المضاعف المشترك الاصغر (فسر ذلك؟)

أي أن ٢³ × ٣ × ٧ = ١٦٨ هو المضاعف المشترك الاصغر

تعريف (٢)

نقول بأن ء القاسم المشترك الاعظم للعددين م ، ب وتكتب على الشكل

ء = (م ،ب) اذا وفقط تحقق الشرطان التاليان:

(١) ء | م ، ء | ب

(٢) اذا كان حـ | م ، حـ | ب فإن حـ ≥ ء

مثال (١٠)

لاحظ أن (٥ ، ١٠)= ٥ ، (١٤ ، ٨٤)=١٤ ، (٢٨ ، ٣٥)=٧

نظرية (٢)

إذا كان (ﺃ ،ﺏ) = ء فإن $\left(\frac{ﺃ}{ء} ، \frac{ﺏ}{ء}\right) = ١$

البرهان: نفرض أن $\left(\frac{ﺃ}{ء} ، \frac{ﺏ}{ء}\right) = ﺣ$

وعلينا أن نبرهن أن ﺣ = ١

نعرف أن القاسم المشترك الاعظم اكبر من أو يساوي الواحد الصحيح بما أن $\left(\frac{ﺃ}{ء} ، \frac{ﺏ}{ء}\right) = ﺣ$

∴ ﺣ | $\frac{ﺃ}{ء}$ ⇐ ﺣ . ﺳ = $\frac{ﺃ}{ء}$

⇐ (ﺣ . ء) ﺳ = ﺃ

⇐ ﺣ . ء | ﺃ

كذلك ﺣ | $\frac{ﺏ}{ء}$ ⇐ ﺣ . ﻫ = $\frac{ﺏ}{ء}$

⇐ (ﺣ . ء) ﻫ = ﺏ

∴ ﺣ . ء | ﺏ

لكن ء | ﺃ ، ء | ﺏ بالفرض

∴ ﺣ ء = ء لكن ء عدد موجب

∴ ﺣ ⩾ ١ لكن ﺣ = $\left(\frac{ﺃ}{ء} ، \frac{ﺏ}{ء}\right) \leqslant ١$

∴ ﺣ = ١ وهو المطلوب

نظرية (٣) نظرية القسمة:

ليكن أ ، ب عددين موجبين فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان **مثل ك ، ر حيث** $٠ \leqslant ر < ب$ حيث $أ = ب\,ك + ر$

والآن علينا ان نبرهن أن ر ، ك وحيدان. ..

لنفرض العكس وأنهما ليسا وحيدين.

بل يوجد $ك_١$ ، $ر_١$ ، $ك_٢$ ، $ر_٢$ حيث $٠ \leqslant ر_١ < ب$
$٠ \leqslant ر_٢ < ب$

$$\therefore \begin{cases} أ = ب\,ك_١ + ر_١ \\ أ = ب\,ك_٢ + ر_٢ \end{cases} \Leftarrow ب\,ك_١ + ر_١ = ب\,ك_٢ + ر_٢ \,.$$

$$\Leftarrow ب\,ك_١ + ر_١ - ب\,ك_٢ - ر_٢ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow ب\,(ك_١ - ك_٢) + (ر_١ - ر_٢) = \text{صفر}$$

لكن ب تقسم الصفر وتقسم ب $(ك_١ - ك_٢)$

$\therefore$ ب تقسم $(ر_١ - ر_٢)$

لكن $٠ \leqslant ر < ب$ ، $٠ \leqslant ر_١ < ب$

$\therefore -ب < ر - ر_١ < ب$ والمضاعف الوحيد بين $-ب$ ، ب هو الصفر

$$\therefore ر - ر_١ = \text{صفر} \Leftarrow ر = ر_١$$

$$\therefore ب\,(ك - ك_١) + (ر - ر_١) = \text{صفر}$$

$$\therefore ب\,(ك - ك_١) + \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\therefore ب\,(ك - ك_١) = \text{صفر} \Leftarrow ك = ك_١$$

أي أن ر ، ك وحيدين.

نظرية (٤)

اذا كانت أ = ب ك + ر فإن (أ، ب) = (ب ، ر)

البرهان:

لنفرض أنَّ ء = (أ، ب)

⇐ ء | أ، ء | ب

لكن أ = ب ك + ر

∴ ء | ر ⇐ ء = (ب، ر)

كذلك لنفرض أن حـ = (ب، ر)

∴ حـ | ب، حـ | ر

لكن أ = ب ك + ر

∴ حـ | ر ⇐ حـ = (أ، ب)

∴ (أ، ب) = (ب، ر) وهو المطلوب.

نظرية (٥): خوارزمية اقليد

إذا كان أ ، ب عددين موجبين، ب ≠ صفر وكان

أ = ب ك + ر ، ٠ ≤ ر < ب

ب = ر $ك_{١}$ + $ر_{١}$ ، ٠ ≤ $ر_{١}$ < ر

ر = $ر_{١}$ $ك_{٢}$ + $ر_{٢}$ ، ٠ ≤ $ر_{٢}$ < $ر_{١}$

$ر_{د}$ = $ر_{د+١}$ $ك_{د+٢}$ + $ر_{د+٢}$ ، ٠ ≤ $ر_{د+٢}$ < $ر_{د+١}$

فإذا كانت د كبيرة جداً بحيث د = ت فإن

$ر_{ت-١}$ = $ر_{ت}$ $ك_{ت+١}$

وكذلك $ر_{ت}$ = (أ، ب)

ملاحظة:

اذا كانت أ سالبة أو ب سالبة فإنه يمكن أخذ الحقيقة القائلة إن

(أ ، ب) = (−أ ، ب) = (أ ، −ب) = (−أ ، −ب)

نظرية (٦)

اذا كان (أ ، ب) = د فإنه يوجد عددان صحيحان س ، ص
بحيث أن أس + ب ص = د

نتيجة رقم (١) اذا كان د | أ ب وكان (د ، أ) = ١ فإن
د | ب

البرهان:

بما أن (د ، أ) = ١ فإنه توجد س ص اعداد صحيحة بحيث ان
د س + أ ص = ١ بضرب الطرفين في ب
فإن د (ب س) + (أ ب) ص = ب
د (ب س) تقسم على د
كذلك أ ب تقسم على د حسب الفرضية د | أ ب
∴ د (ب س) + (أ ب) ص تقسم على د
∴ ب تقسم على د
أي أن د | ب وهو المطلوب.

نتيجة رقم (٢)

إفرض أن (أ ، ب) = د وافرض أن حـ | أ ، حـ | ب فإن حـ | د

البرهان:

بما أن (أ ، ب) = د فإنه يوجد س ، ص بحيث
أ س + ب ص = د

بما أن حـ | أ ⇐ حـ | أ س
حـ | ب ⇐ حـ | ب ص
} ⇐ حـ | أ س + ب ص

⇐ ح | ء وهو المطلوب

نتيجة رقم (٣)

اذا كانت م | ه ، ب | ه ، (م ،ب) = ١

فإن م ب | ه

البرهان

ب | ه ⇐ ه = ب ك

م | ه ⇐ م | ب ك

وبما ان (م ،ب) = ١ فحسب نتيجة رقم (١)

⇐ م | ك ⇐ ك = س م ⇐ ه = ب ك = م ب س

⇐ م ب | ه وهو المطلوب

[٢-٣] الاعداد الاولية

ومن الواضح أن ع٣ = {١ ، ٣} ، ع٧ = {١ ، ٧} ، ع٩ = {١ ، ٣ ، ٩} ، ع١ = {١} فمن هنا نلاحظ هناك بعض الاعداد الطبيعية مثل ٣ ، ٧ يكون لها عاملان مختلفان فقط واعداد مثل ٩ ، ١٢ لها أكثر من عاملين مختلفين، والعدد ١ له عامل واحد فقط.

لهذا فانه يمكن تصنيف الاعداد الطبيعية إلى ثلاثة صنوف هي:

أولا: العدد ١ وله عامل واحد فقط لأن عدد عناصر ع١ يساوي ١

ثانيا: العدد الاولى وهو العدد الذي له عاملان مختلفان فقط أي ان د عدد أولي اذا وفقط اذا كان عدد عناصر عد يساوي ٢

ثالثاً: العدد غير الأولي وهو العدد الذي له أكثر من عاملين مختلفين أي ان د عدد غير أولي اذا وفقط اذا كان عدد عناصر عد أكبر من ٢ .

ولعمل جدول بالاعداد الاولية التي هي أقل من عدد معين مثل ٤٣ نكتب

جميع الاعداد الطبيعية من ٢ إلى ٤٣ هكذا :

٢ ٣ ~~٤~~ ٥ ~~٦~~ ٧ ~~٨~~ ~~٩~~ ~~١٠~~ ١١ ~~١٢~~ ١٣ ~~١٤~~
~~١٥~~ ~~١٦~~ ١٧ ~~١٨~~ ١٩ ~~٢٠~~ ~~٢١~~ ~~٢٢~~ ٢٣ ~~٢٤~~ ~~٢٥~~
~~٢٦~~ ~~٢٧~~ ~~٢٨~~ ٢٩ ~~٣٠~~ ٣١ ~~٣٢~~ ~~٣٣~~ ~~٣٤~~ ~~٣٥~~ ~~٣٦~~
٣٧ ~~٣٨~~ ~~٣٩~~ ~~٤٠~~ ٤١ ~~٤٢~~ ٤٣ .

نلاحظ ان ٢ عدد أولي ولكن جميع مضاعفات ٢ أعدادا غير أولية (لماذا ؟) لهذا فاننا نقوم بشطب جميع مضاعفات العدد ٢

فيكون أول عدد يأتي بعد ٢ ولم يشطب هو ٣ لهذا فإن ٣ عدد أولي (لماذا ؟) ومضاعفاته غير أولية فنقوم بشطب هذه المضاعفات وبعد ذلك نجد أن اول عدد يأتي بعد ٣ ولم يشطب هو ٥ لهذا فهو أولي أما مضاعفاته فغير أولية لهذا نشطبها ونكرر هذه العملية عدة مرات حتى نحصل على جميع الاعداد الاولية بين ٢ ، ٤٣ وهي هنا .

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ؛ ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤١ ، ٤٣ .

تعريف (٣) كل عدد صحيح أكبر من العدد ١ وليس له قواسم موجبة غير العدد ١ ونفسه يسمى عدداً أولياً .

مثال (١) أ) الاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ... كلها اعداد أولية .

ب) الاعداد ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ...كلها اعداد غير أولية .

جـ) أما العدد ١ فهو غير اولي حسب التعريف ولا يدخل ضمن الاعداد الاولية لأنه يضعف نصوص بعض النظريات اذا ما اعتبر عدداً أولياً .

تمارين للمناقشة :

١) كم عدداً أولياً زوجياً موجود في مجموعة الاعداد الطبيعية

٢) كم عدداً أولياً في مجموعة الاعداد الطبيعية يبدأ بالرقم ٥

نتيجة (٤). كل عدد طبيعي اكبر من ١ مثل العدد د يقسم على عدد أولي

البرهان:

لنأخذ مجموعة قواسم العدد د التي هي اكبر من ١ واقل من العدد نفسه د ، هذه المجموعة إما ان تكون:

اولاً : مجموعة خالية اي بمعنى لا يوجد قواسم للعدد د غير العدد ١ والعدد نفسه، وعندها فإن د عدد اولي وهو يقسم على نفسه.

ثانياً: ان تكون المجموعة (أي مجموعة القواسم) مجموعة ليست خالية ولنفرض أن أصغر هذه القواسم هو العدد م .

فإذا كان للعدد م قواسم اكبر من العدد ١ واقل من م نفسه فإن العدد د ايضاً مثل هذه القواسم، ولكن هذا مستحيلاً لاننا اعتبرنا م اصغر القواسم، أي ليس له قواسم غير نفسه والعدد ١ .

∴ م عدد أولي، وعليه فإن العدد د يقسم عليه

أي ان د يقسم على عدد أولي

وهو المطلوب

مثال (١٢)

لقد ذكرنا ان ع١٢ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢}

نلاحظ ان بعض عناصر هذه المجموعة اعداداً أولية والبعض الآخر اعداداً غير أولية ، فإذا استعملنا الرمز مد ليعني مجموعة العوامل الاولية للعدد د فإن

م١٢ = {٢ ، ٣}

والسؤال الذي ينشأ الآن هو هل يمكن كتابة العدد ١٢ كحاصل ضرب أعداد أولية؟

والجواب نعم فنلاحظ أن ١٢ = ٢ × ٢ × ٣ = $٢^٢$ × ٣ = ٣ × $٢^٢$

المقدار ٢ × ٢ = $٢^٢$ ويقرأ ٢ أس ٢ وكذلك $٣^٤$ تعني ٣×٣×٣×٣
والمقدار $٣^٤$ يقرأ ٣ أس ٤

ولكن هل هذه العملية ممكنة لأي عدد طبيعي؟ والنتيجة التالية تجيب على هذا التساؤل.

نتيجة (٥): كل عدد طبيعي يمكن كتابته على شكل حاصل ضرب اعداداً أولية.

البرهان:

حسب النتيجة السابقة كل عدد طبيعي يقسم على عدد أولي مثل $ى_١$، أي أن العدد ن يقسم على $ى_١$

ومنه فإن ن = $ى_١$ $هـ_١$ حيث ١ ≤ $هـ_١$ < ن

فإذا كانت $هـ_١$ = ١ فإن ن = $ى_١$

أما اذا كانت $هـ_١$ > ١ فإن $هـ_١$ تقسم على عدد أولي مثل $ى_٢$

∴ يمكن كتابة $هـ_١$ = $ى_٢$ $هـ_٢$ حيث ١ ≤ $هـ_٢$ < $هـ_١$

فإذا كانت $هـ_٢$ = ١ فإنه يمكن كتابة $هـ_١$ = $ى_٢$

وعليه فإن ن = $ى_١$ $ى_٢$

أما اذا كانت $هـ_٢$ > ١ فإنه يقسم على عدد أولي مثل $ى_٣$ حيث يمكن كتابة

$هـ_٢$ = $ى_٣$ $هـ_٣$ حيث ١ ≤ $هـ_٣$ < $هـ_٢$

فإذا كانت $هـ_٣$ = ١

فإن $هـ_٢$ = $ى_٣$ وعليه فإن ن = $ى_١$. $ى_٢$. $ى_٣$

ولكن هذه العملية لا يمكن ان تدوم للأبد لأن ن عدد موجب

كذلك ن > $هـ_١$ > $هـ_٢$ > $هـ_٣$ > ...

∴ لا بد من الوصول الى عدد مثل $هـ_م$ = ١

وعليه فإن ن = $ى_١$ × $ى_٢$ × $ى_٣$ × $ى_٤$ × .. × $ى_م$

أي يمكن كتابة العدد الطبيعي على شكل حاصل ضرب أعداداً أولية .

نظرية اقليد (٧)

يوجد عدد لا نهائي من الاعداد الاولية:

البرهان:

نفرض عكس النظرية

أي أنه يوجد عدد منتهي من الاعداد الأولية مثل $ى_{١}$ ، $ى_{٢}$ ، ..... $ى_{ر}$

لنأخذ العدد الطبيعي ه المعرف كما يلي

$ه = ١ + ى_{١} \times ى_{٢} \times ى_{٣} \ldots ى_{ر}$.

نحن نعرف أن العدد ه يقسم على عدد أولي

وليكن هذا العدد الاولي من بين الاعداد الاولية $ى_{١}$ ، $ى_{٢}$ ، ... $ى_{ر}$ وليكن $ى_{ه}$

$\therefore ى_{ه} \mid ه$

كذلك $ى_{ه} \mid ى_{١} \times ى_{٢} \times ى_{٣} \times \cdots \times ى_{ر}$

$\therefore ى_{ه} \mid ١$ (لماذا ؟)

وهذا مستحيل لأنه لا يوجد عدد أولي يقسم العدد ١ لأن كل الاعداد الاولية > ١ وسبب هذا التناقض هو الفرض القائل بأن مجموعة الاعداد الاولية منتهية .

$\therefore$ يوجد عدد لا نهائي من الاعداد الاولية

وهو المطلوب .

ملاحظة:

إن أكبر عدد أولي وجد حتى الآن بواسطة الحاسب الاليكتروني هو العدد $٢^{١٩٩٣٧} - ١$ وهذا العدد كبير جداً حيث أنه يتكون من ٦٠٠٠ منزلة ويوجد عدد منتهي من الاعداد الأولية أصغر من هذا العدد .

نتيجة (٦)

اذا كان د عدداً غير أولي فإنه يوجد قاسم له مثل ى بحيث يكون ١ < ى ≤ $\sqrt{د}$

البرهان:

بما ان د عدد غير أولي فإنه يوجد عددان موجبان مثل ى$_١$ ، ى$_٢$ بحيث د = ى$_١$ × ى$_٢$

حيث ١ < ى$_١$ < د ، ١ < ى$_٢$ < د

كذلك اذا كان كل من ى$_٢$ ، ى$_١$ اكبر من $\sqrt{د}$.

فإن ى$_١$ × ى$_٢$ > $\sqrt{د}$ × $\sqrt{د}$ = د وهذا مستحيل لأن حاصل ضربهما = د

∴ لا بد أن يكون احداهما اقل من $\sqrt{د}$.

أو ى$_١$ = $\sqrt{د}$ ، ى$_٢$ = $\sqrt{د}$ وهذا ايضا يثبت النظرية .

وهو المطلوب

نتيجة (٧)

اذا كانت د عددا غير اولي فإن له قاسم أولي أقل من أو يساوي $\sqrt{د}$.

البرهان:

قلنا في نتيجة (٦) ان كل عدد مثل د له قاسم مثل ى بحيث ١ < ى ≤ $\sqrt{د}$.

واثبتنا في نتيجة (٤) ان كل عدد موجب يقسم على عدد أولي

∴ ى تقسم على عدد أولي مثل م بحيث م < ى ≤ $\sqrt{د}$.

وهذا العدد م يقسم ى وبما أن ى تقسم د

∴ م تقسم د وهو عدد أولي .

وهو المطلوب

تساعدنا هذه النتيجة في ايجاد الاعداد الاولية من بين مجموعة من الاعداد حيث وضعت القواعد الاساسية للطريقة التي توجد فيها مجموعة الاعداد الاولية والتي تسمى طريقة الغربال.

وتلخص هذه الطريقة بالشكل التالي:

تحذف مضاعفات الاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ،.....

من بين مجموعة الاعداد المعطاه.

فمثلا لو أردنا ان نجد مجموعة الاعداد الاولية من بين مجموعة الاعداد من ١ إلى ٥٠.

١ ٢ ٣ ~~٤~~ ٥ ~~٦~~ ٧ ~~٨~~ ~~٩~~ ~~١٠~~ ١١ ~~١٢~~ ١٣ ~~١٤~~ ~~١٥~~ ~~١٦~~ ١٧ ~~١٨~~
١٩ ~~٢٠~~ ~~٢١~~ ~~٢٢~~ ٢٣ ~~٢٤~~ ~~٢٥~~ ~~٢٦~~ ~~٢٧~~ ~~٢٨~~ ٢٩ ~~٣٠~~ ٣١ ~~٣٢~~ ~~٣٣~~ ~~٣٤~~
~~٣٥~~ ~~٣٦~~ ٣٧ ~~٣٨~~ ~~٣٩~~ ~~٤٠~~ ٤١ ~~٤٢~~ ٤٣ ~~٤٤~~ ~~٤٥~~ ~~٤٦~~ ٤٧ ~~٤٨~~ ٤٩
~~٥٠~~.

فإننا نحذف مضاعفات العدد ٢ وهي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، .... ، ٥٠ ثم نحذف مضاعفات العدد ٣ وهي ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ ، ..... ، ٤٥

وربما يتساءل الطالب لماذا لم نحذف ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ...

والجواب أن ٦ ، ١٢ ، ١٨ ،.. حذفت مع مضاعفات العدد ٢

ثم نحذف مضاعفات العدد ٥ والتي لم تحذف كمضاعف للعدد ٣ والعدد٢ وهي ٢٥ ، ٣٥

ثم نحذف مضاعفات العدد ٧ والتي لم تحذف كمضاعف ٢ ، ٣ ، ٥ وهي ٤٩ فقط.

فتكون بقية مجموعة الأعداد التي لم تحذف هي مجموعة الاعداد الاولية بين الاعداد ١ إلى ٥٠ وهي

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤١ ، ٤٣ ، ٤٧.

ولم نضع العدد ١ كعدد أولي كما اوضحنا سابقا كذلك لو أردنا ايجاد مجموعة الاعداد الاولية التي اقل من ١٠٠٠٠ فما علينا الا ان نحذف مضاعفات الاعداد الاولية التي اقل من ١٠٠ .

ولكن هذه الطريقة طويلة جدا ، وتأخذ زمناً طويلاً ايضاً فقد استغرقت العالم النمساوي (حلك) عشرين سنة لايجاد مجموعة الاعداد الاولية التي اقل من ١٠٠,٠٠٠,٠٠٠

نتيجة (٨)

إذا كان ى عددا أوليا

وكان ى | ٯ ب فإن ى | ٯ أو ى | ب

البرهان: بما أن ى عدد أولي فإن قواسمه هي العدد ١ والعدد ى نفسه

لهذا فإن (ى ، ٯ) = ى أو (ى ، ٯ) = ١

فإذا كانت (ى ، ٯ) = ى فهذا يتضمنأن ى | ٯ

اما اذا كان (ى ، ٯ) = ١ فحسب النتيجة التي تقول بأنه:

اذا كانت ى | ٯ ب وكانت (ى ، ٯ) = ١ فإن ى | ب

وهو المطلوب

نتيجة (٩)

اذا كان ى عددا أوليا وكان ى | ٯ$_{١}$ × ٯ$_{٢}$ × ٯ$_{٣}$ × ... × ٯ$_{ن}$

فإن ى | ٯ$_{ر}$ لبعض ر حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

البرهان: يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بواسطة الاستنتاج الرياضي

١) اذا كانت ن = ١

فالنظرية صحيحة لأن ى | ٯ$_{١}$

وكذلك اذا كانت ن = ٢

فإن ى | ٯ$_{١}$ × ٯ$_{٢}$

ومنها إما ى | $أ_١$ أو ى | $أ_٢$

٢) لنفرض ان النتيجة صحيحة عندما ه = س

اي ان ى | $أ_١ \times أ_٢ \times أ_٣ \times أ_س$

وإن ى | $أ_ر$ لبعض ر = ١، ٢، ..... ، س

٣) والآن لتكن ى | $(أ_١ \times أ_٢ \times \ldots \times أ_س)(أ_{س+١})$

فإن ى | $(أ_١ \times أ_٢ \times \ldots \times أ_س)$ أو ى | $أ_{س+١}$

وفي أي من الحالتين فإن ى | $أ_ر$ لبعض ر حيث

ر = ١، ٢، ....، س + ١ لجميع قيم ر وهو المطلوب

نظرية (٨) التحليل الوحيد

يمكن كتابة أي عدد طبيعي على شكل حاصل ضرب أعداد أولية بطريقة واحدة فقط (مهما اختلفت طريقة الترتيب).

البرهان.

تعلم أن كل عدد طبيعي د يمكن كتابته على شكل حاصل ضرب اعداد أولية وعلينا أن نبرهن أن هذه الطريقة وحيدة.

لنفرض العكس: أي أنه يوجد طريقتان مختلفان لكتابة العدد د كحاصل ضرب اعداد أولية.

$د = ى_١ \times ى_٢ \times \ldots \times ى_م$.

$د = ه_١ \times ه_٢ \times \ldots \times ه_ر$

وعلينا أن نبرهن ان كل عددٍ أولي في الطريقة الاولى يظهر بنفس التكرار في الطريقة الثانية ولكن بترتيب مختلف.

$د = ى_١ \times ى_٢ \times \ldots \times ى_م$

$\therefore ى_١ | د$

كذلك $ى_١ \mid ق_١ \times ق_٢ \times .. \times ق_ر$

لان $ن = ق_١ \times ق_٢ \times ... \times ق_ر$

$\therefore ى_١ = ق_م$ لبعض $م$

بما أن $ى_١ \times ى_٢ \times .... \times ى_م = ق_١ \times ق_٢ \times ... \times ق_ر$

بالقسمة على $ى_١$

$\therefore ى_٢ \times ى_٣ \times ... \times ى_م = ق_١ \times ق_٢ \times .. \times ق_{م-١} \times ق_{م+١} \times ... \times ق_ر$

بما أن $ى_٢ \mid ى_٢ \times ى_٣ \times ... \times ى_م$

$\therefore ى_٢ \mid ق_١ \times ق_٢ \times ... \times ق_{م-١} \times ق_{م+١} \times ... \times ق_ر$

$\therefore ى_٢ = ق_ح$ وبالقسمة على $ى_٢$ ينتج أن

$ى_٣ \times ى_٤ \times .. \times ى_م = ق_١ \times ق_٢ \times ... \times ق_{ح-١} \times ق_{ح+١} \times ... \times ق_{م-١} \times ق_{م+١} \times .. \times ق_ر$

واذا اكملنا هذه العملية بالنسبة للقيم $ى_٣ \times ى_٤ \times .. \times ى_م$

فنلاحظ بأن كل $ى$ عبارة عن $ق$.

ولا نستطيع أن نستمر بالقيم $ق$ قبل أن ننتهي من $ى$ لأننا سنحصل في النهاية على حاصل ضرب عوامل أولية $= ١$

وهذا مستحيل .

كذلك لو بدأنا بقيم $ق$ فنلاحظ بأن كل قيمة لها هي قيمة $ى$.

نظرية (٩) بدون برهان

اذا كانت $م = ى_١^{هـ_١} \times ى_٢^{هـ_٢} \times ... \times ى_ق^{هـ_ق}$

$ن = ى_١^{ف_١} \times ى_٢^{ف_٢} \times ... \times ى_ق^{ف_ق}$

حيث $هـ_ل \geq ٠$ ، $ف_ل \geq ٠$

فإن $(م ، ن) = ى_١^{ح_١} \times ى_٢^{ح_٢} \times ... \times ى_ق^{ح_ق}$

حيث $ح_ل =$ أصغر $(هـ_ل ، ف_ل)$

$ل = ١ ، ٢ ، ... ، ق$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

$١٢٠ = ٢^{٣} \times ٣^{١} \times ٥^{١} \times ٧$

$٢٥٢ = ٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ٥ \times ٧^{١}$

∴ القاسم المشترك الاصغر **ل** $(١٢٠ ، ٢٥٢) = ٢^{٢} \times ٣^{١} \times ٥^{٠} \times ٧^{١} = ٤ \times ٣ = ١٢$.

٢-٥] المعادلات الديوفانتية

سميت المعادلات التي على الشكل $ا س + ب ص = ح$ بالمعادلات الديوفانتية نسبة إلى الرياضي المصري الاصل وصاحب الثقافة اليونانية واسمه ديوفانتس Diophantus والذي لم يعرف متى عاش ولكن أغلب الظن أنه عاش ما بين ١٧٠٠ - ١٨٥٠.

وكان أول رياضي تطرق الى حل المعادلة الخطية ذات المجهولين.

نتيجة (١٠)

إذا كانت $س_٠$ ، $ص_٠$ حل للمعادلة $ا س + ب ص = ح$ فإن ($س_٠ + ب ت$، $ص_٠ - ا ت$) حل للمعادلة حيث ت أي عدد صحيح.

البرهان: $ا س + ب ص = ح \Leftarrow ا س_٠ + ب ص_٠ = ح$

لان ($س_٠$ ، $ص_٠$) حل

والآن $ا (س_٠ + ب ت) + ب (ص_٠ - ا ت) \Leftarrow ا س_٠ +$

$\cancel{ا ب ت} + ب ص_٠ - \cancel{ا ب ت}$

$ا س_٠ + ب ص_٠ = ح$

$\therefore$ ($س_٠ + ب ت$، $ص_٠ - ا ت$) هي حل للمعادلة.

مثال ١٣

$٥ س + ٦ ص = ١٧$

إن $س = ١$ ، $ص = ٢$ يحققان المعادلة

$\therefore$ (١ ، ٢) حل للمعادلة

وحسب النظرية فإن ١+٦ت، ٢ — ٥ت هي ايضاً حل للمعادلة

وللتأكد من ذلك لاحظ ان

$٥ (١ + ٦ ت) + ٦ (٢ - ٥ ت) = ٥ + \cancel{٣٠ ت} + ١٢ - \cancel{٣٠ ت}$

$= ١٧$.

نتيجة رقم (١١)

اذا كانت (ﺃ ، ﺏ) لا تقسم ﺣ فإنه لا يوجد حل للمعادلة

ﺃس + ﺏص = ﺣ

أما إذا كانت (ﺃ ، ﺏ) | ﺣ

فإنه يوجد حل للمعادلة ﺃس + ﺏص = ﺣ .

البرهان :

١) اذا كانت (ﺃ ، ﺏ) لا تقسم ﺣ

لنفرض أنه يوجد حل للمعادلة ﺃس + ﺏص = ﺣ

وهذا الحل هو س. ، ص. بحيث ﺃس. + ﺏص. = ﺣ

بما أن (ﺃ ، ﺏ) | ﺃس. كذلك (ﺃ ، ﺏ) | ﺏص.

∴ (ﺃ ، ﺏ) | ﺃس. + ﺏص.

أي أن (ﺃ ، ﺏ) | ﺣ وهذا يناقض الفرض (ﺃ ، ﺏ) ∤ ﺣ

∴ لا يوجد حل في هذه المعادلة .

٢) اذا كانت (ﺃ ، ﺏ) | ﺣ فإنه يوجد عدد مثل م بحيث

ﺣ = م × (ﺃ ، ﺏ)

كذلك يوجد عددان مثل ر ، ﻫ بحيث ﺃ ر + ﺏ ﻫ = (ﺃ ، ﺏ)

حسب نظرية القسمة

ثم بضرب طرفي المعادلة في م ينتج

ﺃ (رم) + ﺏ (ﻫم) = م (ﺃ ، ﺏ) = ﺣ

ومن هنا فإن س = رم ، ص = ﻫم

وهو حل للمعادلة ﺃس + ﺏص = ﺣ وهو المطلوب

مثال (١٤)

أي من المعادلات الديوفانتيه التالية ليس لها حل في مجموعة الاعداد الصحيحة :

أ ـ ‎١٤ س + ٣٤ ص = ٩٠

ب ـ ‎١٤ س + ٣٥ ص = ٩١

جـ ـ ‎١٤ س + ٣٦ ص = ٩٣

الحل:

أ ـ (١٤، ٣٤) = ٢

٢|٩٠ ∴ يوجد حل للمعادلة ١٤ س + ٣٤ ص = ٩٠

ب ـ (١٤، ٣٥) = ٧

٧ لا تقسم ٩١ ∴ لا يوجد حل للمعادلة ١٤س + ٣٥ص = ٩١

جـ ـ (١٤، ٣٦) = ٢

٢ لا تقسم ٩٣ ∴ لا يوجد حل للمعادلة ١٤ س + ٣٦ ص = ٩٣.

نتيجة (١٢)

اذا كانت (أ، ب) = ١ وكانت س٠، ص٠ حلاً للمعادلة أس + ب ص = حـ

فإن الحلول لهذه المعادلة تكون على الشكل التالي:

س = س٠ + ب ت

ص = ص٠ − أ ت حيث ت أي عدد صحيح

البرهان: بما أن س٠، ص٠ حل للمعادلة فإن

أ س٠ + ب ص٠ = حـ .... (١)

كذلك بما أن (أ، ب) = ١

∴ (أ، ب) | حـ لان ١|حـ مهما كانت قيمة حـ

∴ يوجد حل آخر للمعادلة أس + ب ص = حـ وليكن هـ، ر

∴ أ ر + ب هـ = حـ ...(٢) و بطرح (٢) من (١) ينتج أن

أ س٠ − أ ر + ب ص٠ − ب هـ = صفر ... (٣)

أ (س. − ر) + ب (ص. − هـ) = صفر ... (٤)

نحن نعرف ان أ | صفر، كذلك.

أ | أ (س. − ر).

∴ لا بد من وجود عدد مثل ت بحيث

أ ت = ص. − هـ ⟸ هـ = ص. − أ ت

وبالتعويض في معادلة رقم (٣) ينتج أن

أس. − أر + ب ص. − ب (ص. − أت) = صفر

أس. − أر + ب ص. − ب ص. − أ ب ت = صفر

∴ أس. − أر − أ ب ت = صفر

∴ أ (س. − ر + ب ت) = صفر ⟸ ر = س. + ب ت

وهو المطلوب

ملاحظة: بينا في النتيجة (١٠) أنه اذا كان (س. ، ص.) حلاً للمعادلة أس + ب ص = حـ في مجموعة الاعداد الصحيحة فإن (س. + ب ت، ص. − أت) حل آخر لها لكل عدد صحيح ت ولكن النتيجة السابقة تبرهن ان هذه هي الصيغة الوحيدة لحلول المعادلة أس + ب ص = حـ عندما (أ ، ب) = ١

مثال (١٥): لنأخذ المعادلة ٥س + ٤ ص = ٢٣.

فإن حل هذه المعادلة بالتخمين هو ٣ ، ٢

أي أن س. = ٣ ، ص. = ٢

وبما أن (٥ ، ٤) = ١

فإن الحل العام لهذه المعادلة في مجموعة الاعداد الصحيحة هو:

س = ٣ + ٤ ت

ص = ٢ − ٥ ت حيث ت عدد صحيح

فمثلا لو أعطينا ت = ١ لحصلنا على:

س = ٣ + ٤ × ١ = ٧

ص = ٢ − ٥ × ١ = −٣

∴ ٧ ، − ٣ حل آخر للمعادلة

هذا ويمكن أن ندمج أو نلخص النتائج السابقة في نظرية واحدة وهي:

نظرية (١٠)

إن المعادلة الديوفانتية أس + ب ص = حـ

ليس لها حلول إذا كان

(أ ، ب) لاتقسم حـ أما اذا كان (أ ، ب) | حـ فإن لها عدد غير منتهي من الحلول.

$$س = ر + \frac{ب}{(أ ، ب)} ت$$

$$ص = هـ - \frac{أ}{(أ ، ب)} ت$$

حيث (ر ، هـ) أي حل، ت عدد صحيح ولا حاجة لاثبات هذه النظرية لاننا اثبتناها في النتائج السابقة.

تمارين على الفصل الثاني

١) اذا كان م عاملاً من عوامل كل من س ، ص فبرهن أنه عامل من عوامل:

أ) س + ص   ب) س ص

٢) اذا كان م عدداً اولياً لا يقسم ب فما قيمة م △ ب فسر اجابتك؟

٣) أ) هل (ط*، △) زمرة ولماذا؟

ب) هل (ط*، ▽) زمرة ولماذا؟

حـ) أعط أمثلة توضح أن عملية الضرب تتوزع على عملية ايجاد القاسم المشترك الاعظم في ط*

٤) اكتب بعض عناصر المجموعات التالية:

أ) م٥   ب) م٥   حـ) ع٥

٥) أوجد س، ص من مجموعة الاعداد الصحيحة (إن وجدت) بحيث أن:

أ) ٥ س + ٧ ص = ١

ب) ٣س + ٦ص = ٢

حـ) ٣س + ٦ص = ٤

٦) اكتب الاعداد التالية في الصورة القياسية

أ) ٣٤٥٢   ب) ٥٧٣

٧) أوجد قيمة

أ) ١٢ △ ١٨   ب) ١٢ ▽ ١٨

٨) اذا كان ٢| م٢ فبرهن على أن ٢ | م

٩) لتكن س ، ص اعداداً صحيحة برهن صحة الجمل التالية:

أ) س ، ص اعداد فردية ⇐ س٢ + ص٢ عدد زوجي ولكنه لا

يقبل القسمة على ٤ .

ب) مربع اي عدد صحيح هو على الصورة ٣ك ، ٣ك + ١ ولكن ليس على الصورة ٣ك + ٢ حيث ك عدد صحيح .

حـ) ليكن م عددا صحيحا ، ى عددا طبيعياً برهن ان المعادلات (س، ص) = ى ، س ص = م ليس لها حل آني إذا وفقط اذا كانت ى | م ٢

١٠) اذا كانت م > ٢ ، د > ١ وكانت م ، د اعداداً صحيحة برهن أن م د — ١ عدد غير أولي .

١١) اذا كان م عدداً طبيعياً غير أولي فبرهن على أنه: م ٢ — ١ عدد غير اولي .

١٢) تعريف:

اذا كان د ، د + ٢ أوليين سمي (د ، د + ٢) زوج من الاعداد الأولية التوائم . أوجد خمسة ازواج من الاعداد الأولية التوائم .

١٣) تعريف:

اذا كان (م ، ب) = ١ سمي م ، ب أولين بالنسبة لبعضها البعض وكذلك اذا كان (م ١ ، م ٢ ، ... م د) = ١ سميت الاعداد اولية بالنسبة لبعضها البعض .

اوجد ثلاثة اعداد اولية بالنسبة لبعضها البعض .

١٤) اذا كان س عدداً طبيعيا . اعط قيما ل س بحيث يكون

أ) ه (س) = س ٢ — س + ٤١ عددا اوليا .

ب) ه (س) = س ٢ — س + ٤١ عددا غير اولي .

١٥) تعريف: اذا كانت د ، د + ٢ ، د + ٤ اعدادا أولية سميت الثلاثية (د ، د + ٢ ، د + ٤) ثلاثية أولية أوجد ثلاثية أولية .

١٦) برهن انه اذا كان ى | م ١ ، ى | م ٢ ، .... ، ى | م د

فإن $ء \mid (حـ_١ أ_١ + حـ_٢ أ_٢ + .. + حـ_د أ_د)$

حيث $حـ_١$، $حـ_٢$، ...، $حـ_د$ اعداد صحيحة

١٧) أي من المعادلات الديوفانتينية التالية ليس لها حل في مجموعة الاعداد الصحيحة ؟

أ) ٧س + ٩ص = ٣٠

ب) ٨س + ٦ص = ١٥

حـ) ٦س + ٣٦ص = ٨١

١٨) بالرجوع إلى المعادلات المعطاه في السؤال التاسع اعلاه أوجد الحل اذا كان للمعادلة حلاً .

الفصل الثالث

التطابق

تعرفنا في الفصل الاول على حساب الساعة وفي هذا الفصل سنتعرف على موضوع التطابق في مقياس معطى وخواص هذا التطابق.

هذا بالاضافة إلى طرق حل التطابقات الخطية ونظرية الباقي الصينية.

[٣ - ١] التطابق

تعريف (١) نقول بأن أ تطابق ب مقياس م اذا وفقط اذا كان
م | (أ - ب)

وتكتب بالرموز (أ ≡ ب (مق م))

وتقرأ أ تطابق ب مقياس م

والرمز (مق) هو اختصار لكلمة مقياس.

مثال (١) لاحظ أن

١) ١ ≡ ٥ (مقياس ٤) لأن ٤ | (٥ — ١)

٢) —٢ ≡ ٩ (مق ١١) لأن ١١ | (٩ — (—٢))

٣) ٦ ≡ ٢٠ (مق ٧) لأن ٧ | (٢٠ — ٦)

٤) ٧٢٠ ≡ ٠ (مق ١٠) لأن ١٠ | (٠ — ٧٢٠)

٥) ٣ + ٥ + ٧ ≡ ٥ (مق ١٠) لان ١٠ | [(٥ — (٣ + ٥ + ٧)]

٦) لكن ١١^{٢} ≢ ١ (مق ٣) لأن ٣ ∤ (١ — ١١^{٢})

٧) كذلك —٢ ≢ ٢ (مق ٨) لأن ٨ ∤ [٢ — (—٢)]

ملاحظة أ ≡ ب (مق م) اذا وفقط اذا كان ب ≡ أ (مق م) اعط أمثلة توضح ذلك ثم برهن صحة ذلك.

نظرية (١)

أ ≡ ب (مق م) اذا وفقط اذا وجد عدد صحيح مثل ك بحيث

أ = ب + ك م

البرهان:

١) أفرض أن أ ≡ ب (مق م) اذن م | (أ − ب)

وحسب نظرية القسمة لا بد من وجود عدد مثل ك بحيث

م ك = أ − ب

∴ أ = ب + م ك

٢) والآن لنفرض أن

أ = ب + م ك

∴ أ − ب = م ك

∴ م | (أ − ب)

∴ أ ≡ ب (مق م) وهو المطلوب

نتيجة (١) اذا كانت أ ح ≡ ب ح (مق (م ح)) حيث ح ≠ صفر فإن

أ ≡ ب (**مق** م)

البرهان:

أ ح ≡ ب ح (مق م ح) ⇐ أ ح = ك م ح + ب ح

⇐ أ = ك م + ب ⇐ أ ≡ ب (مق م)

سؤال: برهن صحة عكس هذه النتيجة

نظرية (٢)

كل عدد صحيح يطابق (بمقياس م) أي عدد من الأعداد٠ . ١ .

٢ . ٠٠٠ ، م − ١

البرهان: لنأخذ العدد ﻡ حيث $\text{ﻡ} = \text{ﻫ}\,\text{ﻣ} + \text{ﺭ}$ حيث $0 \leqslant \text{ﺭ} < \text{ﻣ}$ حسب نظرية القسمة

كذلك ﻫ ، ﺭ وحيدين

$\therefore$ $\text{ﻡ} \equiv \text{ﺭ}$ (مق ﻣ) وكما قلنا أن $0 \leqslant \text{ﺭ} < \text{ﻣ}$

$\therefore$ العدد ﻡ يطابق أي عدد من الاعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ﻣ — ١ وهو المطلوب

تعريف: يسمى العدد ﺭ أصغر باقي للعدد ﻡ (مق ﻣ) اذا كان $\text{ﻡ} = \text{ﻫ}\,\text{ﻣ} + \text{ﺭ}$ حيث $0 \leqslant \text{ﺭ} < \text{ﻣ}$

مثال (٢) لاحظ أن

اصغر باقي للعدد ٧١ (مق ٢) يساوي ١ لأن ٧١ = ٣٥ × ٢ + ١

أصغر باقي للعدد ٧١ (مق ٣) يساوي ٢ لان ٧١ = ٢٣ × ٣ + ٢

اصغر باقي للعدد ٧١ (مق ٥) يساوي ١ لأن ٧١ = ١٤ × ٥ + ١

اصغر باقي للعدد ٧١ (مق ٧) يساوي ١ لأن ٧١ = ١٠ × ٧ + ١

أصغر باقي للعدد ٧١ (مق ١١) يساوي ٥ لأن ٧١ = ١١ × ٦ + ٥

نظرية (٣)

$\text{ﻡ} \equiv \text{ﺏ}$ (مق ﻫ) اذا وفقط اذا كان باقي قسمة ﻡ على ﻣ يساوي باقي قسمة ﺏ على ﻣ .

البرهان

١) لنفرض أن باقي قسمة ﻡ على ﻣ يساوي باقي قسمة ﺏ على ﻣ ويساوي ﺭ

$\therefore \text{ﻡ} = \text{ﻫ}_1\,\text{ﻣ} + \text{ﺭ}$

$\text{ﺏ} = \text{ﻫ}_2\,\text{ﻣ} + \text{ﺭ}$

$\therefore \text{ﻡ} - \text{ﺏ} = \text{ﻣ}\,(\text{ﻫ}_1 - \text{ﻫ}_2)$

$\therefore \text{ﻣ} \mid (\text{ﻡ} - \text{ﺏ})$

$\therefore \text{ﻡ} \equiv \text{ﺏ}$ (مق ﻣ)

٢) والآن لنأخذ الاتجاه المعاكس أي نفرض أن أ ≡ ب (مق م) ونريد ان نبرهن أن باقي قسمة أ على م يساوي باقي قسمة ب على م
باستعمال خوارزمية القسمة تعلم أن

أ = ك١ م + ر١ حيث ٠ ≤ ر١ < م

ب = ك٢ م + ر٢ حيث ٠ ≤ ر٢ < م

∴ أ − ب = (ك١ − ك٢) م + (ر١ − ر٢)

حيث − م < ر١ − ر٢ < م

ولكن أ ≡ ب (مق م) نعني ان م تقسم أ − ب

وواضح أن م تقسم (ك١ − ك٢) م

∴ م تقسم ر١ − ر٢ ولكن − م < ر١ − ر٢ < م

وهذا يعني أن ر١ − ر٢ = صفر . . (لماذا ؟)

∴ ر١ = ر٢ وهو المطلوب

ملاحظة:

اذا كانت ٠ ≤ ب ≤ م ، وكانت أ ≡ ب (مق م)
فإن ب هو باقي قسمة أ على م
فمثلاً ٩ ≡ ٤ (مق ٥) وذلك لان ٥ | (٩ − ٤) .
ومن جهة أخرى لاحظ ان باقي قسمة ٩ على ٥ هو ٤
اعط مزيداً من الأمثلة العددية التي توضح هذه الملاحظة .

نتيجة (٢)

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، د اعداداً صحيحة فإن
١) أ ≡ أ (مق م)

البرهان: أ − أ = ٠ والعدد م | ٠ من التعريف

٢) اذا كانت أ ≡ ب (مق م) فإن ب ≡ أ (مق م)

البرهان:

بما أن أ ≡ ب (مق م) فإن م | أ − ب

كذلك فإن م | ب − أ

∴ ب ≡ أ (مق م) وهو المطلوب

٣) اذا كان أ ≡ ب (مق م)، ب ≡ حـ (مق م) فإن

أ ≡ حـ (مق م)

البرهان:

أ ≡ ب (مق م) ⇐ م | أ − ب ⇐ أ − ب = م هـ$_1$ ... (١)

ب ≡ حـ (مق م) ⇐ م | ب − حـ ⇐ ب − حـ = م هـ$_2$ ... (٢)

بجمع (١)، (٢) ينتج أن:

أ − ~~ب~~ + ~~ب~~ − حـ = م هـ$_1$ + م هـ$_2$

أ − حـ = م (هـ$_1$ + هـ$_2$)

أي أن م | أ − حـ

أي أن أ ≡ حـ (مق م) وهو المطلوب

٤) اذا كان أ ≡ ب (مق م)، حـ ≡ ء (مق م) فإن

أ + حـ ≡ ب + ء (مق م)

البرهان:

أ ≡ ب (مق م) ⇐ م | أ − ب ⇐ أ − ب = م هـ$_1$ ... (١)

حـ ≡ ء (مق م) ⇐ م | حـ − ء ⇐ حـ − ء = م هـ$_2$ ... (٢)

بجمع ١، ٢ ينتج أن

أ − ب + حـ − ء = م هـ$_1$ + م هـ$_2$

(أ + جـ) − (ب + د) = م (ك١ + ك٢)

أي أن م | (أ + جـ) − (ب + د) ⇐

أ + جـ ≡ (ب + د) (مق م) وهو المطلوب

٥) اذا كان أ ≡ ب (مق م)

جـ ≡ د (مق م) فإن

أ جـ ≡ ب د (مق م)

البرهان:

أ ≡ ب (مق م) ⇐ م | أ − ب ⇐ أ − ب = م ك١

جـ ≡ د (مق م) ⇐ م | جـ − د ⇐ جـ − د = م ك٢

يمكن كتابة ب = أ + ك١ م

د = جـ + ك٢ م

∴ أ جـ − ب د = أ جـ − (أ + ك١ م) (جـ + ك٢ م)

= أ جـ − أ جـ − أ ك٢ م − جـ ك١ م − ك١ ك٢ م²

= − أ ك٢ م − جـ ك١ م − ك١ ك٢ م²

= م (− أ ك٢ − جـ ك١ − ك١ ك٢ م)

أي أن م | أ جـ − ب د

أي أن أ جـ ≡ ب د (مق م) وهو المطلوب

ملاحظات:

١ـ يمكن أن نعوض في التطابق كما نعوض في المعادلات فمثلا

اذا كانت س ≡ ٢ (مق ٥) فإن

٢س² − س + ٣ ≡ ٢ (٢)² − ٢ + ٣ (مق ٥)

أي أن ٢س² − س + ٣ ≡ ٩ (مق ٥) ≡ ٤ (مق ٥)

٢) اذا كانت أ ب ≡ أ جـ (مق م) وكانت أ ≡ ٠ (مق م)

فليس صحيحا أن ب ≡ جـ (مق م)

أي أن قانون الاختزال غير قابل للتطبيق هنا ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

لاحظ أن ٢١ ≡ ٥ (مق ٦)

وذلك لأن ٦ | ٢١ — ١٥

ومن جهة أخرى ٢١ ≡ ١٥ (مق ٦) يمكن ان تكتب على الصورة

٣ × ٧ ≡ ٣ × ٥ (مق ٦)

واذا فرضنا أن قانون الاختزال صحيح فإننا نستنتج أن

٧ ≡ ٥ (مق ٦)

أي ٦ | (٧ — ٥) = ٢

وهذا غير صحيح وسببه الافتراض القائل بأن قانون الاختزال صحيح اذن

أ ب ≡ أ حـ (مق م) لا يؤدي إلى أن يكون

ب ≡ حـ (مق م)

والسؤال الذي ينشأ الآن هو تحت اية شروط يكون ذلك ممكنا وهذا ما سنتعرف عليه من خلال النظرية التالية .

نظرية (٤)

اذا كانت أ حـ ≡ ب حـ (مق م) وكان (حـ ، م) = ١

فإن أ ≡ ب (مق م)

البرهان :

بما أن أ حـ ≡ ب حـ (مق م) فإن

م | أ حـ — ب حـ أي أن م | حـ (أ — ب)

وبما أن م ∤ حـ لأن (حـ ، م) = ١

فإن م | أ — ب

∴ أ ≡ ب (مق م) وهو المطلوب

وكتطبيق على هذه النظرية لحل بعض المعادلات في مقياس م نأخذ المثال التالي :

مثال (٤)

ما هي القيم التي تأخذها بحيث تحقق

أ) ٢س ≡ ٤ (مق ٧)

ب) ٢س ≡ ١ (مق ٧)

علما بأن س عدد طبيعي

الحل : أ) ٢س ≡ ٤ (مق ٧) أي أنه حسب نظرية ٤

٢ × س ≡ ٢ × ٢ (مق ٧)

∴ س ≡ ٢ (مق ٧) وذلك لان (٢ ، ٧) = ١

أي أن ٧ | س − ٢ ⇐ س − ٢ = ٧ك حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .

ومنها س ∈ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، . . . }

نحن نعرف أن ١ ≡ ٨ (مق ٧)

ولكن ٢س ≡ ١ (مق ٧)

∴ ٢س ≡ ٨ (مق ٧)

س ≡ ٤ (مق ٧)

وذلك لان (٢ ، ٧) = ١

أي أن س − ٤ = ٧ك حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .

ومنها س ∈ { ٤ ، ٥ ، ٦ ، . . }

نظرية (٥) اذا كان أ حـ ≡ ب حـ (مق م) وكان (حـ ، م) = د

فإن أ ≡ ب (مق $\frac{م}{د}$)

البرهان :

بما أن أ حـ ≡ ب حـ (مق م) فإن

$م | ح ب - ح$

أي أن $م | ح (أ - ب)$ وبما أن $(ح ، م) = ء$ ... (١)

$\therefore (\frac{ح}{ء} ، \frac{م}{ء}) = ١$

أي أن $\frac{م}{ء} \nmid \frac{ح}{ء}$

وبقسمة الطرفين في (١) على ء ينتج أن

$\frac{م}{ء} | \frac{ح}{ء} (أ - ب)$ وبما أن $\frac{م}{ء} \nmid \frac{ح}{ء}$

$\therefore \frac{م}{ء} | (أ - ب)$

أي أن $أ \equiv ب$ (مق $\frac{م}{ء}$)

مثال (٥) ١) لاحظ أن مجموع أرقام العدد ١٢١٦ هو ٦+ ١+ ٢+ ١

وأن ١٢١٦ ≡ (٦+ ١+ ٢+ ١) (مق ٩)

وذلك لأن ٩| ١٢١٦ — ١٠

أي لأن ٩| ١٢٠٦

٢) كذلك ٩١٥ ≡ (٥+ ١+ ٩) (مق ٩)

وذلك لأن ٩| ٩١٥ — ١٥

أي لأن ٩| ٩٠٠

نلاحظ من هذا المثال أن العدد يطابق مجموع أرقامه للمقياس ٩ ولا بد أنك تذكر أن طريقة قابلية القسمة على ٩ تعتمد على هذه الملاحظة وذلك لأن قابلية القسمة على ٩ تعني أن العدد يكافىء صفر مقياس ٩ .

وآلان نضع النظرية التالية التي تبين صحة الملاحظة السابقة بشكل عام.

نظرية (٦) كل عدد صحيح موجب يطابق مجموع أرقامه للمقياس ٩ ، كل عدد مثل د يمكن كتابته بالشكل التالي

$د = ء \times ١٠^{٠} + ء_{١} \times ١٠^{١} + \ldots + ء_{هـ-١} \times ١٠^{هـ-١}$

$+ ء_{هـ} \times ١٠^{هـ}$

حيث $ى_{٠}$ ، $ى_{١}$ ، $ى_{ن-١}$ ، $ى_{ن}$ هي أرقام منازل العدد

لاحظ أن $د - (ى_{٠} + ى_{١} + \cdots + ى_{ن-١} + ى_{ن}) =$

$$(ى_{٠} \times ١٠^{٠} + ى_{١} \times ١٠^{١} + \cdots + ى_{ن-١} \times ١٠^{ن-١} + ى_{ن} \times ١٠^{ن} - ى_{٠} - ى_{١} - \cdots - ى_{ن-١} - ى_{ن})$$

$$= ى_{٠}(١٠ - ١) + ى_{١}(١٠^{١} - ١) + \cdots + ى_{ن-١}(١٠^{ن-١} - ١) + ى_{ن}(١٠^{ن} - ١)$$

وبما أن $٩ | د - (ى_{٠} + ى_{١} + \cdots + ى_{ن-١} + ى_{ن})$ (مق ٩)

وهو المطلوب

مثال (٦) اذا قيل لك بأن:

(٣١٤) × (١٥٩) = ٤٩٨٢٦ فكيف تتأكد من ذلك دون الرجوع الى عملية الضرب العادية .

الحل : اذا كان العددان متساويان فإنهما يكونان مطابقين لعدد واحد ولمقياس واحد .

ولنأخذ المقياس ٩ على سبيل المثال .

قلنا في نظرية (٦) بأن كل عدد يطابق مجموع أرقامه للمقياس ٩

$\therefore$ (٤ + ١ + ٣) × (١ + ٥ + ٩) ≡ ٨ × ١٥ (مق ٩)

≡ ٨ × (٥ + ١) (مق ٩)

≡ ٨ × ٦ (مق ٩)

≡ ٤٨ (مق ٩)

≡ (٨ + ٤) (مق ٩)

≡ ١٢ (مق ٩)

≡ (٢ + ١) (مق ٩)

≡ ٣ (مق ٩)

بينما ٤٩٨٢٦ ≡ ٢٩ (مق ٩)

≡ ١١ (مق ٩)

≡ ٢ (مق ٩)

أي أن (٣١٤) × (١٥٩) ≢ ٤٩٨٢٦

لأنهما لا يطابقان نفس العدد ولنفس المقياس.

[٣-٢] التطابق الخطي

إن التطابق الخطي هو التطابق الذي يكون على الشكل التالي :

أ س ≡ ب (مق م) وأن هذا التطابق الخطي يمكن أن يكون له حل وحيد أي يوجد قيمة واحدة لـ س تحقق التطابق أو يوجد أكثر من حل أو لا يوجد حل على الاطلاق.

وسنتعرف على هذه الحالات من خلال القواعد التالية :

قاعدة (١) اذا كان (أ ، م) ∤ ب فإن أ س ≡ ب (مق م) ليس لها حل

البرهان: تعلم من المنطق ان ن ← د تكافيء ~ د ← ~ ن

والآن سنفترض العكس المنطقي أي :

اذا كانت أ س ≡ ب (مق م) لها حل فإن (أ ، م) | ب

ولنفرض أن الحل هو ر

∴ أ ر ≡ ب (مق م)

أي أن م | (أ ر − ب) او أ ر − ب = هـ م

بما أن (أ ،م) | أ ر . كذلك (أ ،م) | هـ م

∴ (أ ،م) | ب

∴ اذا كانت (أ ،م) ∤ ب فإن أ س ≡ ب (مق م) ليس لها حل وهو المطلوب

مثال (٧) : ٦ س ≡ ٧ (مق ٨) ليس لها حل لأن

٦×٨ ∤ ٧ بمعني أن ٢ ∤ ٧

مثال (٨): ٣س ≡ ١ (مق ١٠) لها حل لأن

(٣، ١٠)|١

بمعنى أن ١|١

قاعدة (٢) اذا كان (ا، م) = ١ فإن التطابق

ا س ≡ ب (مق م) لها حل واحد فقط في المجموعة {٠، ١، ...، م − ١}

البرهان:

بما أن (ا، م) = ١

∴ يوجد عددان مثل ح، ى بحيث أن

اح + م ى = ١ وبالضرب في ب ينتج أن

ا ح ب + م ى ب = ب

∴ ا ح ب − ب = −م ى ب

ونرى هنا أن ا ح ب − ب هي مضاعف للمقياس م

أي أن ا ح ب ≡ ب (مق م)

ولهذا فإن ح ب حل للمعادلة ا س ≡ ب (مق م)

وبقي علينا أن نبرهن ان الحل وحيد في المجموعة {٠، ١، ...، م−١}

لنفرض أنه يوجد حلان مثل ر، ك ∈ {٠، ١، ...، م−١}

∴ ا ر ≡ ب (مق م)

ا ك ≡ ب (مق م)

∴ ا ر ≡ ا ك (مق م) ... (١)

وبما ان (ا، م) = ١

فإننا نستطيع أن نختزل ا من طرفي (١) (لماذا؟)

∴ ر ≡ ك (مق م)

أي أن م | ر − ك ولكن:

∵ ٠ ≤ ر < م ، ٠ ≤ ك < م

∴ −م < ر − ك < م

∴ ر − ك = ٠ . ومنه ⇐ ر = ك

أي يوجد عدد وحيد في {٠ ، ١ ، ... ، م−١}

ملاحظة: اذا كانت ر حلا للتطابق

أ س ≡ ب (مق م) عندما (أ ، م) = ١

أي س ≡ ر (مق م)

∴ س = م ك + ر

حيث ك عدد صحيح ، لهذا فإن عدد الحلول للتطابق

أ ر ≡ ب (مق م) هو لا نهائي في مجموعة الاعداد الصحيحة

ولكنه تحت الشرط (أ ، م) = ١

يكون وحيدا في {٠ ، ١ ، .. ، م−١}

والآن لنأخذ الامثلة التالية

مثال (٩) حل التطابق الخطي التالي

٤س ≡ ١ (مق ١٥)

الحل: تعلم أن

١ ≡ ١٦ (مق ١٥)

ولكن ٤ س ≡ ١ (مق ١٥)

∴ ٤ س ≡ ١٦ (مق ١٥)

٤ س ≡ ٤ × ٤ (مق ١٥)

وباختزال ٤ من الطرفين لأن (٤ ، ١٥) = ١

ينتج أن س ≡ ٤ (مق ١٥)

وهو الحل الوحيد في {٠ ، ١ ، .. ، ١٤}

مثال (١٠) حل التطابق التالي

١٤ س ≡ ٢٧ (مق ٣١)

الحل : بما أن (١٤ ، ٣١) = ١

∴ يوجد حل وحيد في { ٠ ، ١ ، . . . ، ٣٠ }

لاحظ أن ٥٨ ≡ ٢٧ (مق ٣١)

∴ ١٤س ≡ ٥٨ (مق ٣١)

٢ × ٧س ≡ ٢ × ٢٩ (مق ٣١)، لكن (٢ ، ٣١) = ١

∴ ٧س = ٢٩ (مق ٣١) ولكن ٦٠ ≡ ٢٩ (مق ٣١)

∴ ٧س ≡ ٦٠ (مق ٣١)

لكن ٦٠ ≡ ٩١ (مق ٣١)

٧س ≡ ٩١ (مق ٣١)

٧ × س ≡ ٧ × ١٣ (مق ٣١) لكن (٧ ، ٣١) = ١

∴ س ≡ ١٣ (مق ٣١)

∴ ١٣ الحل الوحيد للتطابق المعطى في { ٠ ، ١ ، . . . ، ٣٠ }

ويمكن ان نستخدم هذه الطريقة في حل المعادلات الديوفانتينية من النوع

أس + ب ص = حـ وذلك بأن نحل احد التطابقين

أس ≡ حـ (مق ب)

ب ص ≡ حـ (مق أ)

ولتوضح ذلك نأخذ المثال التالي

مثال (١١)

حل المعادلة ٩س + ١٦ص = ٣٥

الحل : لنأخذ

١٦ص ≡ ٣٥ (مق ٩)

لاحظ أن ٣٥ ≡ ٨ (مق ٩)

∴ ١٦ص ≡ ٨ (مق ٩)

∴ ٢ص ≡ ١ (مق ٩) لأن (٨, ٩) = ١

ولكن ١٠ ≡ ١ (مق ٩)

∴ ٢ ص ≡ ١٠ (مق ٩)

∴ ص ≡ ٥ (مق ٩) وذلك لأن (٢، ٩) = ١

∴ ص = ٥ + ٩ ت ثم نعوض في المعادلة الاصلية لنحصل على

٩س + ١٦ (٥ + ٩ت) = ٣٥

نحل هذه المعادلة لنجد قيمة س بدلاله ت

أي ٩س + ٨٠ + ١٤٤ ت = ٣٥

٩س = — ٤٥ — ١٤٤ت بالقسمة على ٩ ينتج أن

س = —٥ — ١٦ ت

لهذا فإن حل المعادلة ٩س + ١٦ص = ٣٥ هو

س = —٥ —١٦ ت

ص = ٥ + ٩ ت حيث ت عدد صحيح

مثال (١٢) لنأخذ التطابق

٣س ≡ ٦ (مق ١٥) ونحاول حله في {٠، ١، ...، ١٤}

لاحظ ان ٣س ≡ ٦ (مق ١٥) ⟸ س ≡ ٢ (مق ٥)

والحل الوحيد للتطابق س ≡ ٢ (مق ٥) في {٠، ١، ...، ٥} هو ٢

وتعلم أن س = ٥ك + ٢ حيث ك عدد صحيح

هي حلول أخرى لنفس التطابق السابق والسؤال الذي ينشأ الآن هو ما

قيم ك التي تجعل الحل (٥ك + ٢) ∈ {٠، ١، ...، ١٤}

من الواضح أن هذه القيم ∈ {٠، ١، ٢}

أي توجد ثلاثة حلول فقط في المجموعة {٠، ١، ...، ١٤}

هي {٢، ٧، ١٢}

ومن الجدير بالملاحظة هنا أن (٣، ١٥) = ٣ = عدد الحلول في المجال المذكور

هل هذه الملاحظة صحيحة دائماً؟

للاجابة عن هذا السؤال نضع النظرية او القاعدة التالية:

قاعدة (٣) لتكن ء = (أ، م) فإذا كانت ء|ب فإن

أس = ب (مق م) لها ء من الحلول في {٠، ١، ٠٠٠، م − ١}

البرهان: بما أن ء = (أ، م)

∴ ء|أ ، ء|م، وكذلك ء|ب بالفرض عندها تكون ء عامل مشترك بين أ، م، ب

∴ يمكن ان نحذف هذا العامل المشترك من التطابق أي ان

$$\frac{أ}{ء} س = \frac{ب}{ء} (مق \frac{م}{ء})$$

لاحظ أن ء = (أ، م) ⇐ $(\frac{أ}{ء}، \frac{م}{ء}) = ١$

لهذا فإن التطابق

$\frac{أ}{ء}$ س = $\frac{ب}{ء}$ (مق $\frac{م}{ء}$) له حل واحد في {٠، ١، ...، $\frac{م}{ء}$ − ١}

حسب القاعدة السابقة

ولنفرض ان هذا الحل هو ر ولنفرض انه يوجد حل آخر مثل ع يحقق التطابق

أس ≡ ب (مق م) حيث ع ∈ {٠، ١، ٠٠٠٠، م−١}

∴ أر ≡ أع ≡ ب (مق م)

أي أن أع ≡ أر (مق م) لكن (أ ، م) = ء

∴ $\frac{م}{د}$ ع~ر~ ≡ $\frac{م}{د}$ ر (مق $\frac{م}{د}$)

∴ ع~ر~ ≡ ر (مق $\frac{م}{د}$) لأن ($\frac{م}{د}$، $\frac{م}{د}$) = ١

∴ ع~ر~ = ر + ك ($\frac{م}{د}$) حيث ≥ ر + ك ($\frac{م}{د}$) > م.

يبقى ان نجد عدد الحلول التي هي على الصورة

ع~ر~ = ر + ك ($\frac{م}{د}$) ضمن المجموعة {٠، ٠٠، م ـ ١}

حيث ك عدد صحيح غير سالب، ٠ ≥ ر > $\frac{م}{د}$

من الواضح ان ع~ر~ = ر + ك ($\frac{م}{د}$) تزاد مع ازدياد قيمة ك

أ) وعندما ك = د ـ ١ يكون

ع~ر~ = ر + م ـ $\frac{م}{د}$.

ولكن ر > $\frac{م}{د}$ ⇐ ع~ر~ > $\frac{م}{د}$ + م ـ $\frac{م}{د}$ = م

ب) وعندما ك = د يكون ع~ر~ = ر + م > $\frac{م}{د}$ + م ≯ م

∴ قيم ك التي تحقق الشروط المطلوبة ∈ إلى المجموعة

{٠، ١، ٠٠، د ـ ١}

∴ عدد الحلول يساوي د . وهو المطلوب .

مثال (١٣) حدد عدد الحلول لكل من المتطابقات التالية

أ) ٣س ≡ ٦ (مق ١٥)

ب) ٤س ≡ ٨ (مق ١٥)

حـ) ٥س ≡ ١٠ (مق ١٥)

د) ٦س ≡ ١١ (مق ١٥

هـ) ٧س ≡ ١٤ (مق ١٥)

الحل: أ) ٣س ≡ ٦ (مق ١٥)

(٣، ١٥) = ٣ وكذلك ٣|٦

∴ حسب القاعدة (٣) فإن عدد الحلول = ٣

ب) ٤س ≡ ٨ (مق ١٥)

بما أن (٤ ، ١٥) = ١

∴ يوجد حل واحد حسب القاعدة (٢)

حـ) ٥س ≡ ١٠ (مق ١٥)

(٥ ، ١٥) = ٥ وكذلك ٥|١٠

∴ حسب القاعدة ٣ فإن عدد الحلول ٥

د) ٦س ≡ ١١ (مق ١٥)

(٦ ، ١٥) = ٣ لكن ٣ ∤ ١١

∴ لا يوجد حل حسب القاعدة (١)

هـ) ٧س ≡ ١٤ (مق ١٥)

(٧ ، ١٥) = ١

∴ يوجد حل واحد حسب القاعدة (٢)

هذا ويمكن دمج القواعد ١ ، ٣ في النظرية التالية :

نظرية (٧) : أس ≡ ب (مق م) ليس لها حل اذا كان (أ ، م) ∤ ب ولكن اذا كان (أ ، م)|ب
فإنها لها (أ ، م) من الحلول .

مثال (١٤) لنأخذ النظام التالي س ≡ ١ (مق ٣)

س ≡ ٢ (مق ٥)

س ≡ ٣ (مق ٧)

والآن لنأخذ المعادلة

س = ع (مق ٣ × ٥ × ٧)

= ع (مق ١٠٥)

حيث $ع$ هو العدد الذي يحقق جميع عناصر النظام السابق .

اي ان باقي قسمة $ع$ على ٣ يساوي ١

وباقي قسمة $ع$ على ٥ يساوي ٢

وباقي قسمة $ع$ على ٧ يساوي ٣

لاحظ ان العدد ٥٢ يحقق هذه الشروط الثلاثة مجتمعة (تأكد من ذلك) .

والسؤال الذي ينشأ الان هو

هل هذا هو الحل الوحيد ؟

تكمن الاجابة عن هذا السؤال في النظرية التالية المسماه نظرية الباقي الصينية

نظرية (٨)

نظرية الباقي الصينية

إن النظام التطابقي $س \equiv أ_{ل}$ (مق $م_{ل}$)

حيث $ل = \{١ ، ٢ ، ... ، ه\}$

$(م_{ل} ، م_{ع}) = ١$

عندما $ل \neq ع$ له حل وحيد (مق $م_{١} ، م_{٢} ، م_{ه}$)

البرهان:

١) عند $ه = ١$

$س \equiv أ_{١}$ (مق $م_{١}$)

$\therefore س \equiv أ_{١} + ه_{١} م_{١}$

٢) وعند $ه = ٢$

$س \equiv أ_{٢}$ (مق $م_{٢}$)

$س \equiv أ_{٢} + ه_{٢} م_{٢}$

لكن $س = أ_١ + ك_١ م_١$

$\therefore$ $أ_١ + ك_١ م_١ = أ_٢ + ك_٢ م_٢$

$ك_١ م_١ = أ_٢ - أ_١ + ك_٢ م_٢$

$\therefore$ $ك_١ م_١ \equiv أ_٢ - أ_١$ (مق $م_٢$)

لكن ($م_١$ ، $م_٢$) = ١ بالفرض .

$\therefore$ التطابق له حل وحيد ولنفرض ان هذا الحل هو ت .

$\therefore$ $ك_١ = ت + ك_٢ م_٢$

$\therefore$ $س = أ_١ + ك_١ م_١$

$= أ_١ + (ت + ك_٢ م_٢) م_١$

$س = أ_١ + ت م_١ + ك_٢ م_١ م_٢$

$\therefore$ $س = (أ_١ + ت م_١) + ك_٢ م_١ م_٢$

بمعنى أن $س \equiv (أ_١ + ت م_١)$ (مق $م_١ م_٢$)

فلو داومنا في العملية وأخذنا ك = ٣ فاننا نلاحظ بأن التطابق يتحقق لذا نقول أن المتطابقة متحققة للقيم

ك = ١ ، ك = ٢

فهي تحقق لجميع القيم .

تمارين على الفصل الثالث

١) اذا كان أ فرديا فبرهن أن $أ^٢ = ١$ (مق ٤)

٢) اذا كان $ح^٢ \equiv ١$ (مق ٢) وكان ح عددا طبيعيا فبرهن ان ح عدد فردي .

٣) اذا كان $ح^٢$ مربعا كاملا ، أي $\sqrt{ح^٢}$ عدد طبيعي فبرهن ان

$ح^٢ \equiv .$ (مق ٤)

أو $ح^٢ \equiv ١$ (مق ٤) .

٤) برهن صحة أو عدم صحة الجمل التالية :

أ) $أ \equiv ب$ (مق د) $\Leftarrow$ أ ح $\equiv$ ب ح (مق د)

ب) أ ≡ ب (مق د) ، حـ ≡ ء (مق د) ⇐ أ + حـ ≡ ب + ء (مق د)

أ حـ ≡ ب ء (مق د)

أ حـ ≡ ب ء (مق د)

أر + حـ هـ ≡ بر + ء هـ (مق د)

جـ) أ ≡ ب (مق د) ⇐ أ^ن ≡ ب^ن (مق د)

د) أ ≡ ب

ن (٠) اقتران كثير الحدود معاملاته اعداد صحيحه } ⇐

ن (أ) = ن (ب)

هـ) أ حـ ≡ ب حـ (مق د) ⇐ أ ≡ ب (مق د) .

و) أ حـ ≡ ب حـ (مق د) ⇐ أ ≡ ب (مق د / (د ، حـ))

ز) أ ≡ ب (مق د) ، أ ≡ ب (مق م) ⇐ أ ≡ ب (مق [د ، م])

حيث [د ، م] = المضاعف المشترك الاصغر للعددين د ، م .

ح) اذا كان (م ، د) = ١ وكان أ ≡ ب (مق م) ، أ ≡ حـ (مق د) ⇐ أ ≡ ب (مق م د)

٥) حدد عدد الحلول لكل من التطابقات التالية وأوجد تلك الحلول

أ) ٣س ≡ ٩ (مق ١٥)

ب) ٥س ≡ ١٣ (مق ١٥)

حـ) ٧س ≡ ١٢ (مق ١٥)

د) ٣س ≡ ٧ (مق ٩)

هـ) ٢س ≡ ٣ (مق ٥)

٦) أوجد حلاً للنظام

س ≡ ٢ (مق ٣)

س ≡ ٣ (مق ٥)

س ≡ ٤ (مق ٧)

هل الحل وحيد ؟ ولماذا ؟

الفصل الرابع

تطبيقات على التطابق

يعالج هذا الفصل بعض التطبيقات على التطابق في مقياس معين، وقد شملت هذه التطبيقات كلا من نظرية فيرما، ونظرية ويلسون والمثلثات الفيثاغورية واستعمالاتها .

[٤-١] مقدمة:

قبل أن نبدأ في اعطاء نظريتا فرما وويلسون لا بد من التعرف على بعض القواعد المهمة في اثبات هاتين النظريتين .

قاعدة (١) : اذا كان (أ ، م) = ١ فإن اقل بواقي للمقادير
أ ، ٢أ ، ٣أ ، ٠٠٠ ، (م-١) أ (مق م) هي
١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ ، م-١ ، بأي ترتيب

ولتوضيح هذه القاعدة نأخذ المثال التالي :

مثال (١) : لتكن أ = ٣ ، م = ٨ لاحظ ان (أ ، م) = ١ وان أ عدد أولي

أ = ٣ ، ٢أ = ٦ ، ٣أ = ٩ ، ٤أ = ١٢ ، ٥أ = ١٥ ، ٦أ = ١٨ ، ٧أ = ٢١ فإن بواقي هذه الاعداد للمقياس ٨ هي :

٣ لأن باقي قسمة ٣ على ٨ = ٣

٦ لأن باقي قسمة ٦ على ٨ = ٦

١ لأن باقي قسمة ٩ على ٨ = ١

٤ لأن باقي قسمة ١٢ على ٨ = ٤

٧ لأن باقي قسمة ١٥ على ٨ = ٧

٢ لأن باقي قسمة ١٨ على ٨ = ٢

٥ لأن باقي قسمة ٢١ على ٨ = ٥ .

ويلاحظ من هذا المثال البواقي لم تظهر بترتيب تصاعدي او تنازلي بل ظهرت عشوائيا .

ولكنها تأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠ ، (م — ١)

مثال (٢) اذا كان ٥ = ٣ عدد أولي وكانت د = ٥

فإن ٥^د — ١ = ٣^٤ = ٨١

لاحظ ان ٨١ ≡ ١ (مق ٥)

أي أن ٥^د — ١ ≡ ١ (مق د)

لاحظ ان (٥ ، د) = ١

والسؤال الذي ينشأ الآن هو هل نتيجة هذا المثال صحيحة بشكل عام، والنظرية التالية تعطي جوانب عن هذا السؤال .

نظرية فرما :

اذا كان د **عددا أوليا وكان (٥ ، د) = ١ فإن**

٥^د — ١ ≡ ١ (مق د)

البرهان : حسب القاعدة (١) في هذه الوحدة والتي تقول

اذا كانت د عدداً أوليا وكان (٥ ، د) = ١

فإن أقل بواقي للاعداد

٥ ، ٢٥ ، ٠٠٠ ، (د — ١) ٥ هي ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، د — ١

وبما ان كل عدد من الاعداد ٥ ، ٢٥ ، ٠٠٠٠٠ ، (د — ١) ٥ يطابق عددا من البواقي للمقياس د .

∴ حاصل ضرب الاعداد ≡ حاصل ضرب البواقي للمقياس د لأنه اذا كان

٥ ≡ ب (مق د) ،

حـ ≡ ى (مق د)

فإن ٥ حـ ≡ ب ى (مق د)

∴ ٥ × ٢٥ × ٣٥ × ٠٠٠ × (د — ١) ٥ ≡ ١ × ٢ × ٠٠ ×

(د — ١) (مق د)

أي أن $أ^{د-١} (د - ١)! \equiv (د-١)!$ (مق د)

ولكن $(د ، (د-١)!) = ١$ لأن د أولي

$\therefore أ^{د-١} \equiv ١$ (مق د) وهو المطلوب

نتيجة (١): اذا كان د عددا أوليا فإن $أ^{د} \equiv أ$ (مق د) لكل قيم أ

البرهان: بما أن د عدد أولي

$\therefore (أ ، د) = ١$ أو $(أ ، د) = د$

اولا: اذا كانت $(أ ، د) = ١$ فإن

$أ^{د-١} \equiv ١$ (مق د) من نظرية فرما

ولكن $أ \equiv أ$ (مق د) لكل أ

$\therefore أ.أ^{د-١} = أ \times ١$ (مق د)

$\therefore أ^{د} \equiv أ$ (مق د)

ثانيا: اذا كانت $(أ ، د) = د$ فإن $د|أ^{د}$ أي ان $أ^{د} = ٠$ (مق د)

وكذلك $د | أ$ ، أي أن $أ \equiv ٠$ (مق د)

$\therefore أ^{د} \equiv أ$ (مق د) وهو المطلوب

مثال (٣) برهن أن $٣^{١٦} \equiv ١$ (مق ١٧)

الحل: يمكن اثبات ذلك بطريقة طويلة وهي ان نجد $٣^{١٦}$ ثم نقسمها على ١٧ فإذا كان الباقي ١ فيكون التطابق صحيحا

ولكن باستعمال نظرية فيرما عندما $أ = ٣$ عدد أولي، $د = ١٧$

وملاحظة أن $(٣ ، ١٧) = ١$

$\therefore أ^{د-١} \equiv ١$ (مق د)

أي أن $٣^{١٦} \equiv ١$ (مق ١٧) وهو المطلوب.

والنتيجة التالية تعطي تعميما لنظرية فيرما

نتيجة ٢ : ان المعادلة $س^{٢} \equiv ١$ (مق د) لها حلان فقط.

هما ١ ، د - ١ في $\{٠ ، ١ ، ... ، د - ١\}$

البرهان : لنفرض أن ر هي حل للمعادلة س^{٢} ≡ ١ (مق د)

وهنا ر هي أقل باقٍ للمقياس د

∴ ر^{٢} ≡ ١ (مق د)

∴ ر^{٢} − ١ = ٠ (مق د)

∴ د | ر^{٢} − ١ أي أن د | (ر − ١) (ر + ١)

∴ د | (ر − ١) أو د | (ر + ١)

∴ ر − ١ ≡ ١ (مق د) أو ر + ١ ≡ (مق د)

أي ان ر − ١ = ك د .

أي ر = ١ + ك د

∴ ر ≡ ١ (مق د)

أو ر + ١ = ك د

أي ر = −١ + ك د

= (د − ١) + (ك − ١) د

∴ ر ≡ (د − ١) (مق د)

∴ حلا المعادلة س^{٢} = ١ (مق د) في {٠ ، ١ ، ... ، د − ١}

هما ١ ، د − ١

مثال (٤) حل المعادلة

س^{٢} ≡ ١ (مق ٨) في {٠ ، ١ ، ... ، ٧}

الحل :

س = ١ أو س = ٧

حسب القاعدة (٢) اعلاه

نعرف بأنه اذا كانت (أ ، د) = ١

فإن

أس ≡ ١ (مق د) لها حل وحيد

لنفرض أن هذا الحل هو أَ والذي نسمية النظير التطابقي للعدد أ

حيث $أ . أَ \equiv ١$ (مق د)

وللتوضيح اليك المثال التالي :

مثال (٥) اذا كانت د عدداً أولياً = ١٣ فإن الجدول التالي يبين أ ، أَ .

حيث $أ . أَ \equiv ١$ (مق ١٣)

أ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
أَ	١	٧	٩	١٠	٨	١١	٢	٥	٣	٤	٦	١٢

وهنا نلاحظ إنه اذا ضربنا أ في أَ وقسمنا على ١٣ فإن الباقي ١ تأكد من صحة الاعداد الواردة في الجدول اعلاه .

ولما كانت الاعداد ٢ ، ٣ ، . . . ، د — ٢ ومقلوباتها التطابقية تحدث كازواج بمعنى ان نظير أ التطابقي هو أَ .

يعني ان نظير أَ التطابقي هو أ

فإن هذه الاعداد تقسم إلى $\frac{د-٣}{٢}$ من الازواج المختلفة

ففي المثال اعلاه تكون الازواج المرتبة هي

(٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١٠) ، (٥ ، ٨) ، (٦ ، ١١) وعددها ٥ = $\frac{١٣-٣}{٢}$

القاعدة (٣) اذا كانت د عددا فرديا أوليا وكانت أ حلا للتطابق

$أس \equiv ١$ (مق د) حيث أ = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، د — ١ فإن

$أَ \equiv بَ$ (مق د) إذا وفقط اذا كان $أ \equiv ب$ (مق د)

كذلك $أ \equiv أَ$ (مق د) **اذا وفقط اذا كان** أ = ١ .

أو أ = د — ١ .

البرهان : ١ـ لنفرض ان $أَ \equiv ت$ (مق د) ∴ $أَ . أ \equiv ت . أ$ (مق د)

وذلك لان $أ \equiv أ$ (مق د)

كذلك $بَ . أَ . أ \equiv ب . ت . أ$ (مق د)

لان $بَ \equiv بَ$ (مق د) .

∴ بَ ≡ ا (مق د)

وذلك لأن ا.ا ≡ ب بَ (مق د) ≡ ١ (مق د)

والآن لنفرض العكس

أي ا ≡ ب (مق د)

∴ ا بَ ≡ ب.بَ (مق د)

كذلك اَ . ا . بَ ≡ اَ . ب . بَ (مق د) أي ان

بَ ≡ اَ (مق د) وهو المطلوب.

٢) لنفرض ان ا = ١ أو ا = د — ١

من الواضح ان ١ × ١ = ١ (مق د)

∴ ا هو ١َ

وواضح ان ١ ≡ (مق د)

أما اذا كانت ا = د — ١ فواضح ان

$(د - ١)(د - ١) = د^٢ - ٢د + ١$

أي ان (د — ١)(د — ١) ≡ ١ (مق د)

∴ $\overline{(د - ١)} = (د - ١)$

والآن نفرض العكس أي أن ا ≡ اَ (مق د)

∴ ١ ≡ ا . اَ ≡ $ا^٢$ (مق د) أي ان $ا^٢$ ≡ ١ (مق د)

وباستخدام القاعدة (٢) نستنتج أن

ا = ١ أو ا = د — ١ وهو المطلوب.

[٣-٤] نظرية ويلسون (٢)

د عدد أولي اذا وفقط اذا كان (د — ١)! ≡ — ١ (مق د)

البرهان: لاحظنا من القاعدة (٣) أن الاعداد ٢، ٣، ...، د — ٢ تقسم إلى ازواج مرتبة عددها $\frac{د - ٣}{٢}$ وهذه الازواج المرتبة كلها مختلفة.

وحاصل ضرب مكونات كل زوج مرتب مثل ا . اَ ≡ ١ (مق د)

وهذا يتضمن

٢ × ٣ × ٠٠ × (د − ٢) ≡ ١ (مق د)

∴ ١ × ٢ × ٣ × ٠٠٠ × (د − ٢) ≡ ١ × ١ (مق د) كذلك

١ × ٢ × ٣ × ٠٠٠ × (د − ٢) (د − ١) ≡ ١ × ١ × (د − ١) (مق د)

(د − ١)! ≡ (د − ١) (مق د)

(د − ١)! ≡ − ١ (مق د) وهو المطلوب

والآن لنفرض العكس وهو

(د − ١)! ≡ − ١ (مق د)

ونريد ان نثبت أن د عدد أولي

نستنتج من الفرض أن

(د − ١)! + ١ = هـ د

أي أن د | (د − ١)! + ١

لنفرض أن د ليس عددا أوليا

أي يوجد م ∉ {١ ، د} بحيث ان م | د ، م عدد طبيعي وبما أن

د | (د − ١)! + ١

∴ م | (د − ١)! + ١ .

وبما أن م ≤ د − ١ ، لان م يقسم د وهو ≠ د

∴ م | (د − ١)! وذلك لأن أحد عوامل (د − ١)! هو م

وبما أن م | (د − ١)! + ١

∴ م | ١ ∴ م = ١ وهذا تناقض .

∴ الفرض القائل بان د ليس عددا صحيحا هو افتراض خاطىء

لهذا فإن د عدد أولي وهو المطلوب .

[٤-٤] مثلثات فيثاغورس:

أن أول من لاحظ بأن اطوال معينة لاضلاع مثلث تشكل مثلثلا قائم الزاوية هم البابليون قبل حوالي ٣٥٠٠ سنة .

كما أنهم لاحظوا بالتجربة أن

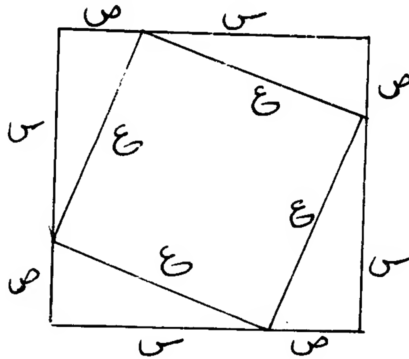
مجموع مربعي ساقي المثلث القائم الزاوية = مربع القطر

أي أن

$$س^2 + ص^2 = ع^2$$

حيث س ، ص اطوال ساقي المثلث القائم الزاوية بينما ع القطر وبعد ألف سنة من عهد البابليين جاء فيثاغورس واثبت هذه الحقيقة كنظرية .

والان يوجد الكثير من البراهين لهذه النظرية منها البرهان الهندسي في المستوى البياني حسب طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين في المستوى ، ثم البرهان الهندسي والذي يتمثل بالشكل التالي .



حيث

مساحة المربع الكبير = مساحة المربع الصغير + مساحة المثلثات الاربعة

$$\therefore (س+ص)^2 = ع^2 + 4\left(\frac{س ص}{2}\right)$$

$$س^2 + ص^2 + 2 س ص = ع^2 + 2 س ص$$

$$\therefore س^2 + ص^2 = ع^2$$

كذلك هناك برهان لأحد رؤساء الولايات المتحدة James Garfield قبل ان يصبح رئيسا للولايات المتحدة .

إن أي حل لمعادلة نظرية فيثاغورس $س^2 + ص^2 = ع^2$ يمكن ان يشتق من الحل عندما تكون س ، ص عددين صحيحين أوليين فيما بينهما أي أن

$(س ، ص) = 1$

بمعنى أنه اذا وجدنا الحلول للمعادله $س^2 + ص^2 = ع^2$

عندما $(س ، ص) = 1$

فإنه يمكن أن نجد بقية الحلول

وسوف نسمي حل المعادلة $(س^2 + ص^2 = ع^2)$ أ ، ب ، حـ

الحل الاساسي للمعادلة شريطة أن تكون $(أ ، ب) = 1$

كذلك أ ، ب ، حـ أعدادا صحيحة موجبة .

قاعدة (٤):

اذا كان أ ، ب ، حـ الحل الاساسي للمعادلة $س^2 + ص^2 = ع^2$

فإنه إما أ أو ب عدد زوجي .

كذلك لا يمكن أن يكون كل من أ ، ب عدداً فرديا ولا أن يكون كل منهما زوجيا .

البرهان :

نفرض أن أ ، ب أعداد زوجية

$\therefore (أ ، ب) \neq 1$

وهذا يخالف كون أ ، ب ، حـ حلا اساسيا للمعادلة .

$\therefore$ لا يمكن أن يكون كلا من أ ، ب ، عددا زوجيا

كذلك بالنسبة لكون كل من أ ، ب عدد فردي

اذا كان أ ، ب ، عددين فرديين

$أ^2 \equiv 1$ (مق ٤) وذلك لأن $أ = 2هـ + 1$

وبالتالي $أ^2 = 4هـ^2 + 4هـ + 1$

كذلك $ب^2 \equiv 1$ (مق ٤) لنفس السبب السابق

لكن $ا^2 + ب^2 = ح^2$

∴ $ح^2 \equiv 2$ (مق ٤) وهذا مستحيل لانه اذا كان $ح^2$ مربعاً كاملاً .

فإن $ح^2 \equiv 0$ (مق ٤) أو $ح^2 \equiv 1$ (مق ٤)

∴ بما أن ا ، ب لا يمكن أن يكون كلاهما زوجيا او كلاهما فرديا

∴ احداها زوجي ، والاخر فردي .

نتيجة (٢)

اذا كان ا ، ب ، ح حلا اساسيا للمعادلة

$س^2 + ص^2 = ع^2$

فإن ح عدد فردي

البرهان :

حسب القاعدة (١) تعلم ان ا ، فردي ، ب زوجي

∴ $ا^2 + ب^2$ يعطي عددا فرديا (لماذا ؟)

أي أن

$ا^2 + ب^2 \equiv 1$ (مق ٢) كذلك

$ح^2 = ا^2 + ب^2 \equiv 1$ (مق ٢)

أي أن ح عدد فردي وهو المطلوب .

قاعدة (٥) :

اذا كانت $ر^2 = س ت$ وكانت (س ، ت) = ١ فإن س ، ت مربعات كاملة

البرهان :

لنحلل كل من س ، ت إلى العوامل الاولية مرفوعة لأسس

$س = ل_1^{هـ_1} \times ل_2^{هـ_2} \times \cdots \times ل_د^{هـ_د}$

$ت = ك_1^{ف_1} \times ك_2^{ف_2} \times \cdots \times ك_م^{ف_م}$.

بما أن (س ، ت) = ١

فإنه لا يمكن أن يظهر أي من الاعداد الاولية في كل من التحليلين للعددين س ، ت

∴ $ر^{٢} = ل_{١}^{هـ_{١}} \times ل_{٢}^{هـ_{٢}} \times \ldots \times ل_{د}^{هـ_{د}} \times ك_{١}^{ف_{١}} \times ك_{٢}^{ف_{٢}} \times \ldots \times ك_{م}^{ف_{م}}$.

وحسب نظرية العوامل الاولية (كل عدد يمكن كتابته على شكل حاصل ضرب اعداد أولية بطريقة واحدة .

∴ ل تختلف عن ك

وبما أن $ر^{٢}$ مربع كامل فإن $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ ، ... ، $هـ_{د}$ ، $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ ، ... ، $ف_{م}$ اعداد زوجية (لماذا ؟)

∴ س ، ت مربعات كاملة .

مثال (٦) :

اذا كانت (س ، ص) = ١

، $س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}$

فبرهن على ان (ص ، ع) = (س ، ع) = ١

الحل :

نفرض (س ، ص) = ى ⇐ ى | س ، ى | ص

وبملاحظة أن

$(\frac{س}{ى})^{٢} + (\frac{ص}{ى})^{٢} = (\frac{ع}{ى})^{٢}$

نستنتج ان

ى | ع

∴ (ص ، ع) = ١ ، وكذلك (س ، ع) = ١

ومن هنا نلاحظ أنه اذا كانت أ ، ب ، حـ حلا اساسيا للمعادلة $س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}$ شريطة ان تكون (أ ، ب) = ١ فإنه لا يمكن أن يكون لأي اثنين من أ ، ب ، حـ عامل أولي مشترك

قاعدة (٦) :

اذا كانت ا ، ب ، حـ حلا اساسيا للمعادلة $س^٢ + ص^٢ = ع^٢$.

وكان ا عددا زوجيا فإنه يوجد عددين موجبين مثل

م، د بحيث $م > د$ ، $(م، د) = ١$

كذلك $م \not\equiv د$ (مق ٢) بحيث

$$\text{ا} = ٢\,م\,د$$

$$\text{ب} = م^٢ - د^٢$$

$$\text{حـ} = م^٢ + د^٢$$

البرهان: لنفرض أن $\text{ا} = ٢ر$ حيث $ر$ أية عدد

$\therefore \text{ا}^٢ = ٤ر^٢$

لكن $\text{حـ}^٢ = \text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ا}^٢ = \text{حـ}^٢ - \text{ب}^٢$

$\therefore ٤ر^٢ = \text{حـ}^٢ - \text{ب}^٢ = (\text{حـ} - \text{ب})(\text{حـ} + \text{ب}) \;\ldots\ldots (١)$

لكن $٤ر^٢$ عدد زوجي

$\therefore$ (حـ − ب) (حـ + ب) عدد زوجي لكن حـ عدد فردي حسب نتيجة القاعدة (١)

كذلك ب عدد فردي لأننا فرضنا أن ا زوجي

$\therefore$ حـ − ب زوجي ، كذلك حـ + ب زوجي

$\therefore$ يمكن كتابة $\text{حـ} + \text{ب} = ٢\,ل \;\ldots\ldots (٢)$

$\text{حـ} - \text{ب} = ٢\,ت$ بالجمع ينتج أن

$$٢\,\text{حـ} = ٢ل + ٢ت$$

$$\text{حـ} = ل + ت$$

كذلك اذا طرحنا المعادلتين

$$\text{حـ} + \text{ب} = ٢ل$$

$$\mp \text{حـ} \pm \text{ب} = \mp ٢\,ت$$

$$٢\text{ب} = ٢ل - ٢ت$$

$ب = ل - ت$

فلو عوضنا معادلة رقم (٢) في معادلة رقم (١) ينتج أن

$٤ س^٢ = (٢ل)(٢ت) \Leftarrow ٤ س^٢ = ٤ ل ت$

أي أن

$س^٢ = ل.ت$ وهنا إذا كانت

$(ل ، ت) = ١$

فإن ل ، ت مربعات كاملة وسوف نبرهن الآن أن $(ل ، ت) = ١$

لنفرض العكس

أي أن $(ل ، ت) = ء$ حيث $ء \neq ١$

$\therefore ء | ل ، ء | ت$

لكن $حـ = ل + ت \Leftarrow ء | حـ$

كذلك $ب = ل - ت \Leftarrow ء | ب$

لكن نحن نعرف من التمرين (١) بان $(ب ، حـ) = ١$

$\therefore (ل ، ت) = ١$

$\therefore$ (ل ، ت) مربعات أي يمكن كتابة كل منها بالشكل التالي

$ل = م^٢ ، ت = د^٢$

$\therefore ٤س^٢ = ٤ل ت = ٤م^٢ د^٢$

لكن فرضنا في البداية بأن $أ = ٢س$

$\therefore أ^٢ = ٤س^٢ \Leftarrow أ^٢ = ٤م^٢ د^٢$

$\therefore أ = ٢م د$

$ب = م^٢ - د^٢$ لأن $ب = ل - ت$

$حـ = م^٢ + د^٢$ لأن $حـ = ل + ت$.

$ب = م^٢ - د^٢$ يتضمن أن تكون $م > د$ لأن د موجبة

بقي علينا ان نثبت بأن $(م ، د) = ١$ ويتم ذلك كما يلي

هنا نفرض العكس أي أن

ء|م، ء|د .·. ء|أ لأن أ = ٢ م د

كذلك ء|ب لأن ب = م^{٢} — د^{٢} .

.·. (أ ، ب) = ء وهذا يناقض أن تكون

أ ، ب ، ح حلاً أساسياً لانه يجب أن يكون (أ ، ب) = ١

.·. الفرض خطأ .

وهو أن (م ، د) = ء

.·. (م ، د) = ١

والآن علينا أن نثبت أن م ≢ د (مق ٢) ويتم ذلك كما يلي

إذا كانت م ≡ د ≡ ٠ (مق ٢) فإن م زوجي وكذلك د زوجي وهذا يتضمن أن تكون

أ = ٢ م د زوجي ايضا

ب = م^{٢} — د^{٢} زوجي ايضا

وهذا يخالف قاعدة (١) على اعتبار أنه لا يجوز أن يكون كلا

(أ ، ب) أعداداً زوجية

كذلك اذا كانت م ≡ د ≡ ١ (مق ٢) فإن م فردياً

كذلك د فرديا وهذا يتضمن أن تكون

أ = ٢ م د زوجيا

كذلك ب = م^{٢} — د^{٢} زوجيا وهذا ايضا يخالف القاعدة (١)

على اعتبار أن أ ، ب اعدادا زوجية

.·. م ≢ د (مق ٢)

وبهذا نكون قد اكملنا اثبات القاعدة (٣)

مثال (٧)

إن الاعداد ٣٣ ، ٥٦ ، ٦٥ هي حل أساسي للمعادلة

س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

لأن

$(٣٣)^٢ + (٥٦)^٢ = (٦٥)^٢$

هنا $ا = ٥٦ = ٢ \times ٧ \times ١٤$

حيث $م = ٧$ ، $د = ٤$

$ب = م^٢ - د^٢$

$= ٧^٢ - ٤^٢$

$= ٤٩ - ١٦$

$= ٣٣$

كذلك $حـ = م^٢ + د^٢$

$= ٧^٢ + ٤^٢$

$= ٤٩ + ١٦$

$= ٦٥$

وهنا $(م ، د) = ١$ ، $م > د$ كذلك $م \equiv د$ (مق ٢)

القاعدة (٧) عكس القاعدة (٦)

اذا كانت $ا = ٢ م د$

$ب = م^٢ - د^٢$

$حـ = م^٢ + د^٢$

فإن ا ، ب ، حـ هي حل للمعادلة $س^٢ + ص^٢ = ع^٢$

كذلك اذا كانت $م > د$ ، $(م ، د) = ١$ ، $م \not\equiv د$ (مق ٢) فإن ا ، ب ، حـ حل أساسي للمعادلة .

البرهان:

اثبات القسم الأول وهو أن ا ، ب ، حـ هي حل للمعادلة

$ا^٢ + ب^٢ = (٢م د)^٢ + (م^٢ - د^٢)^٢$

$= ٤م^٢ د^٢ + م^٤ - ٢م^٢ د^٢ + د^٤$

$= م^٤ + ٢م^٢ د^٢ + د^٤$

$= (م^٢ + د^٢)^٢ = حـ^٢$

وهذا يثبت أن $أ$ ، $ب$ ، $حـ$ حل للمعادلة .

اثبات القسم الثاني :

وهو أن $أ$ ، $ب$ ، $حـ$ حل اساسي عندما تكون

$م > ن$ ، $(م، ن) = ١$ ، $م \not\equiv ن$ (مق ٢)

نفرض أن $ى|م$ ، $ى | ب$ حيث $ى$ عدد فردي أولي

$\therefore ى | حـ$ لأن $أ^٢ + ب^٢ = حـ^٢$

$\therefore ى|حـ + ب \Leftarrow ى|٢م^٢$ لأن $حـ + ب = ٢م^٢$

$\Leftarrow ى|م^٢ \Leftarrow ى|م$

كذلك $ى|حـ - ب \Leftarrow ى | ٢ن^٢$ لأن $حـ - ب = ٢ن^٢$

$\Leftarrow ى|ن^٢$

$\Leftarrow ى|ن$

بما أن $ى|م$ ، $ى|ن$ ، $\therefore (م، ن) = ى$

وهذا يثبت عكس الفرضية بأن $(م، ن) = ١$

$\therefore (أ، ب) = ١$

وبما أن $م>ن$

فإن $ب$ موجب لأن $ب = م^٢ - ن^٢$

وبما أن $م$، $ن$ أعدادا موجبة فإن $أ$ عدد موجب .

كذلك $حـ$ عدد موجب .

$\therefore أ$ ، $ب$ ، $حـ$ حلا أساسيا للمعادلة .

$س^٢ + ص^٢ = ع^٢$

هذا ويمكن ان تدمج القاعدتين ٣ ، ٤ في النظرية التالية :

نظرية (٣)

ان جميع الحلول $س = أ$ ، $ص = ب$ ، $ع = حـ$ للمعادلة
$س^٢ + ص^٢ = ع^٢$

حيث ا ، ب، ح أعداد موجبة و لا يوجد اي عامل مشترك بينهما

وحيث ا عدد زوجي تعطى بالشكل ا = ٢ م د

ب = م٢ — د٢

ح = م٢ + د٢ حيث (م، د) = ١

وليس كلاهما عددا فرديا

وكذلك م > د

واليك جدول يبين بعض مثلثات فيثاغورس .

م	د	ا	ب	ح	ا٢	ب٢	ح٢
٢	١	٤	٣	٥	١٦	٩	٢٥
٣	٢	١٢	٥	١٣	١٤٤	٢٥	١٦٩
٤	١	٨	١٥	١٧	٦٤	٢٢٥	٢٨٩
٤	٣	٢٤	٧	٢٥	٥٧٦	٤٩	٦٢٥
٥	٢	٢٠	٢١	٢٩	٤٠٠	٤٤١	٨٤١
٥	٤	٤٠	٩	٤١	١٦٠٠	٨١	١٦٨١
٦	١	١٢	٣٥	٣٧	١٤٤	١٢٢٥	١٣٦٩
٧	٢	٢٨	٤٥	٥٣	٧٨٤	٢٠٢٥	٢٨٠٩

تمارين على الفصل الرابع

١) تعريف (اقتران أويلر) ليكن

ن : ط ← ط حيث ط مجموعة الاعداد الطبيعية

وليكن ن (د) = عدد الاعداد الطبيعية التي هي أقل من د وأولية مع د

أوجد

أ) ن (٥)   ب) ن (٦)

حـ) ن (٤)   د) ن (١٢)

٢) اذا كان ن (٠) اقتران أولير وكان م ∈ ص حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة وكان (م ، د) = ١

فبرهن أن

د | م^ن(د) − ١

ملاحظة : تسمى هذه النتيجة نظرية أويلر.

٣) اذا كان ن (٠) اقتران أويلر وكان م عددا أوليا فبرهن صحة أو عدم صحة العبارات التالية :

أ) ن (م) = م − ١

ب) ن (م^ك) = م^ك − م^ك−١

٤) اذا كان م ≠ د أوجد

(م^٢ن + ١ ، م^٢م + ١)

أ) عندما م عدد فردي

ب) عندما م عدد زوجي

٥) اذا كان م عددا أوليا وكان

م + د = م − ١

حيث م، د ⩾ صفر، م ≠ ٢

فبرهن باستخدام نظرية ويلسون أن

$$م!د! + (-١)^م \equiv ٠ \ (مق\ \text{ل})$$

٦) باستخدام نظرية الباقي الصينية أوجد أصغر عدد طبيعي بحيث اذا قُسم على ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ كانت البواقي ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي .

٧) لكل عدد صحيح ل برهن أن

$ل^{١٣} - ل$ يقبل القسمة على ٩١ .

٨) أوجد أصغر عدد طبيعي يحققه التطابق

$$(٢٤٠)^{٣٧} \equiv س \ (مق\ ٧)$$

٩) برهن أن

أ) $١^٢ \times ٣^٢ \times ٥^٢ \times \cdots \times ٩^٢ \equiv ١$ مق (١١)

ب) $٢^٢ \times ٤^٢ \times ٦^٢ \times \cdots \times ١٠^٢ \equiv ١$ (مق ١١)

١٠) اعط ثلاثة امثلة للمثلثات الفيثاغورية .